

### 3.4 Anwendung auf g-KdV

Hier betrachten wir das Cauchy-Problem  $u(t=0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R})$  (\*)

$$\text{für } u_t + u_{xxx} \pm \partial_x(u^{k+1}) = 0 \quad (\text{g-KdV-K}).$$

Die Phasenfunktion ist  $\phi(\xi) = \xi^3$ , der lineare Propagator

$$U_\phi(t) = e^{-t\partial_x^3}. \text{ Die } X_{SB}\text{-Räume wie folgendes sind stets}$$

diejenigen für diese spezielle Phasenfunktion.

#### 3.4.1 Abschätzungen für freie Lösungen

(Hier: = Lösungen  $U_\phi(t)u_0(x)$  der "Airy-Gleichung"  $u_t + u_{xxx} = 0$ )

Wir beginnen mit einer triviale Abschätzung, die man als "refined" der Strichartz-Abschätzungen ansehen kann. Diese werden wir anschließend verfeinern und beweisen.

Def. Es seien  $s \geq 0$  und  $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ . Wir definieren den bilinearen Pseudodifferentialoperator  $I_-^s$  durch

$$\mathcal{F} I_-^s(f, g)(\xi) = \int_{\xi_1 + \xi_2 = \xi} |\xi_1 - \xi_2|^s \hat{f}(\xi_1) \hat{g}(\xi_2) d\xi_1,$$

wobei  $\int_{\xi_1 + \xi_2 = \xi} \dots d\xi_1$  das Faltungsgliedintegral bezeichnet.

Lemma 1. Es seien  $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R})$  und  $u = U_\phi u_0, v = U_\phi v_0$ .

$$\text{Dann gilt } \| I_-^{\frac{1}{2}} I_-^{\frac{1}{2}}(u, v) \|_{L_{x,t}^2} \lesssim \|u_0\|_2 \|v_0\|_2.$$

(\*) das folgende gilt auch für den nichtperiodischen Fall

Bew.: (1) gilt für alle  $\xi_1 \in \text{supp}(u_0)$  und  $\xi_2 \in \text{supp}(v_0)$ , (212)  
 dass  $|\xi_1| \geq 2|\xi_2|$ , so gewinnt man mit dieser Abschätzung  
 eine ganze Ableitung, man hat dann

$$\| \partial_x (u \cdot v) \|_{L_{x,t}^2} \lesssim \|u_0\|_2 \|v_0\|_2$$

(2) Das Transfer-Prinzip ergibt für  $b > \frac{1}{2}$

$$\| I^{\frac{1}{2}} I_-^{\frac{1}{2}} (u, v) \|_{L_{x,t}^2} \lesssim \|u\|_{X_{ob}} \|v\|_{X_{ob}}$$

Bew.: Wir haben

$$\mathbb{F}_x I^{\frac{1}{2}} I_-^{\frac{1}{2}} (u, v) (\xi, t) = c |\xi|^{\frac{1}{2}} \int_* |\xi_1 - \xi_2|^{\frac{1}{2}} e^{it(\xi_1^3 + \xi_2^3)} \hat{u}_0(\xi_1) \hat{v}_0(\xi_2) d\xi_1$$

und mit Plancherel in der x-Variable folgt

$$\| I^{\frac{1}{2}} I_-^{\frac{1}{2}} (u, v) \|_{L_{x,t}^2}^2$$

$$= c \int_{\mathbb{R}^2} |\xi| \int_* \int_* |\xi_1 - \xi_2|^{\frac{1}{2}} |\eta_1 - \eta_2|^{\frac{1}{2}} e^{it(\xi_1^3 + \xi_2^3 - \eta_1^3 - \eta_2^3)} \hat{u}_0(\xi_1) \overline{\hat{u}_0(\eta_1)} \hat{v}_0(\xi_2) \overline{\hat{v}_0(\eta_2)} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2$$

$$\stackrel{\text{Integration über } t}{=} c \int_{\mathbb{R}} |\xi| \int_* \int_* |\xi_1 - \xi_2|^{\frac{1}{2}} |\eta_1 - \eta_2|^{\frac{1}{2}} \delta_0(\xi_1^3 + \xi_2^3 - \eta_1^3 - \eta_2^3) d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2$$

Jetzt suchen wir das Argument  $\xi_1^3 + (\xi - \xi_1)^3 - \eta_1^3 - (\xi - \eta_1)^3 = g(\eta_1)$

als  $\delta$ -Distributionen genauer!

$$\xi_1^3 + (\xi - \xi_1)^3 = \xi^3 + 3\xi^2\xi_1 + 3\xi\xi_1^2 = \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi_1 - \xi)$$

und also

$$\begin{aligned} g(\eta_1) &= 3\xi(\xi_1(\xi_1 - \xi) - \eta_1(\eta_1 - \xi)) = 3\xi((\xi_1 + \eta_1)(\xi_1 - \eta_1) - \xi(\xi_1 - \eta_1)) \\ &= 3\xi(\xi_1 - \eta_1)(\xi_1 + \eta_1 - \xi) \end{aligned}$$

$\xi = 0$  bildet eine Nullmenge in der äußeren Integration (213)

nach  $\xi$ , daher abgesehen hat  $g$  zwei einfache Nullstellen

$$y_1^+ = \xi_1 \quad \text{und} \quad y_1^- = \xi - \xi_1 (= \xi_2)$$

Um die Identität  $\delta(g(x)) = \sum_{g(x_n)=0} \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x-x_n)$  anzuwenden zu

können, benötigen wir noch die Ableitung

$$g'(y_1) = 3\xi(\xi - 2y_1), \quad g'(y_1^+) = 3\xi(\xi_2 - \xi_1), \quad g'(y_1^-) = 3\xi(\xi_1 - \xi_2),$$

die an den Stellen  $y_1^\pm$  gerade das Gewicht  $|\xi_1 - \xi_2|^{1/2} |y_1 - y_2|^{1/2}$

cancelt. Nach Integration  $dy_1$  bleibt also übrig

$$C \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |U_0^+(\xi_1)|^2 |V_0^+(\xi_2)|^2 + U_0^+(\xi_1) \overline{U_0^+(\xi_2)} \overline{V_0^+(\xi_2)} \overline{V_0^+(\xi_1)} d\xi_1 d\xi_2$$

$$\lesssim \|U_0\|_2^2 \|V_0\|_2^2, \quad \text{wobei für den zweiten Beitrag Cauchy-}$$

Schwarz und für beide Planchonel benutzt wurde. □

Ähnlich wie im Fall der eindimensionalen Schrödingergleichung können wir das Argument verbinden mit dem Sobolev-Schein ES und der HLS-Ungleichung, um die folgende Ainy-Version der Fefferman-Stein-Abschätzung zu erhalten:

Lemma 2: Für  $4 < q < \infty$  und  $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$  gilt

$$\|U_q U_0\|_{L_t^4(H_x^{\frac{1}{4}, q})} \lesssim \|U_0^+\|_{L_t^r}$$

Zum Beweis können wir annehmen, dass

(214)

$$(i) \hat{u}_0 \geq 0 \quad (\text{denn die Norm rechts hängt nur von } |\hat{u}_0| \text{ ab})$$

und dass

$$(ii) \hat{u}_0 = \chi_{[0, \infty)} \hat{u}_0 \quad \text{oder} \quad \hat{u}_0 = \chi_{(-\infty, 0]} \hat{u}_0 \quad (\text{da wir eine}$$

lineare Abschätzung beweisen, folgt die Beh. aus der Addition

dieser beiden Spezialfälle).

Wir setzen  $v_0 = I^{\frac{1}{4}} u_0$  und erhalten

$$\|u_\varphi u_0\|_{L_t^4(H_x^{\frac{1}{4}, q})}^4 = \|u_\varphi v_0\|_{L_t^4 L_x^q}^4 = \| |u_\varphi v_0|^2 \|_{L_t^2 L_x^{\frac{q}{2}}}^2$$

$$\text{Sobolev} \quad \lesssim \| I^\varepsilon |u_\varphi v_0|^2 \|_{L_{xt}^2}^2 \quad \varepsilon - \frac{1}{2} = -\frac{2}{q} \implies \varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{2}{q} > 0$$

Auf der rechten Seite im vorigen Beweis erhalten wir zwei Beiträge

$$I = \int d\xi |\xi|^{2\varepsilon-1} \int_* d\xi_1 |\xi_1 - \xi_2|^{-1} |\hat{v}_0(\xi_1)|^2 |\hat{v}_0(\xi_2)|^2$$

$$II = \int d\xi |\xi|^{2\varepsilon-1} \int_* d\xi_1 |\xi_1 - \xi_2|^{-1} \hat{v}_0(\xi_1) \underbrace{\hat{v}_0(\xi_2)}_{= \hat{v}_0(-\xi_2)} \hat{v}_0(\xi_2) \underbrace{\hat{v}_0(\xi_1)}_{= \hat{v}_0(-\xi_1)}$$

wobei  $II = 0$  wegen unserer Annahme (ii). Aus dem sel-

ben Grund ist der Integrand in I auch nur dann von

Null verschieden, wenn  $\xi_1$  und  $\xi_2$  verschiedene Vorzeichen

haben, so dass  $|\xi_1 - \xi_2| \geq \max(|\xi_1|, |\xi_2|) \geq |\xi_1|^{\frac{1}{2}} |\xi_2|^{\frac{1}{2}}$ ,

$$\text{mithin} \quad |\xi_1 - \xi_2|^{-1} |\hat{v}_0(\xi_1)|^2 |\hat{v}_0(-\xi_2)|^2$$

$$\leq |\xi_1|^{-\frac{1}{2}} |\hat{v}_0(\xi_1)|^2 \cdot |\xi_2|^{-\frac{1}{2}} |\hat{v}_0(-\xi_2)|^2 = |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 |\hat{u}_0(-\xi_2)|^2,$$

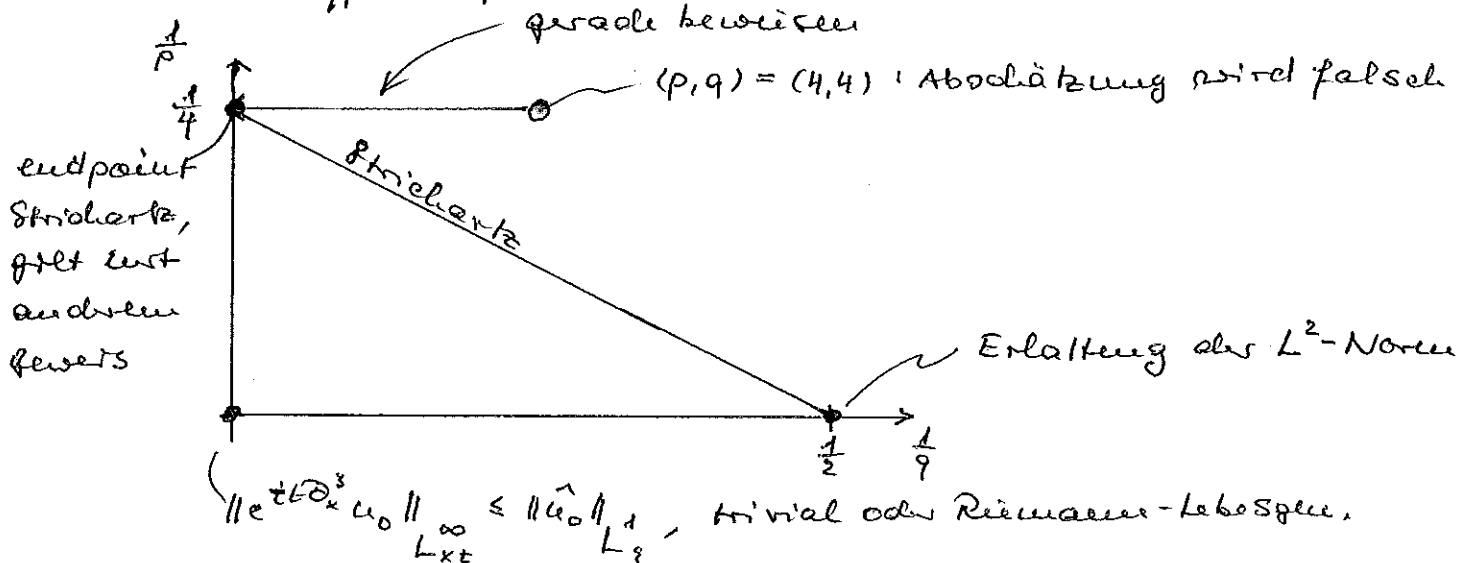
so dass

$$I \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\varepsilon-1} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 |\hat{u}_0(\xi_1-\xi)|^2 d\xi_2 d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 \cdot |\xi|^{2\varepsilon-1} * |\hat{u}_0|^2(\xi_1) d\xi_1$$

Folgt Hölder und - für den zweiten Faktor - HLS, genau wie im Beweis der Fefferman-Stein-Abschätzung.  $\square$

in einem  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$  - Diagramm:



Durch Interpolation von Lemma 2 mit der  $L^2$ -Normerhaltung und der trivialen Abschätzung unten links erhalten wir die Strichartz-type Abschätzung mit Ableitungsgewinn für die Airy-Gleichung:

Folgerung: Sei  $0 < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$  und  $\frac{2}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$ . Dann gilt

$$\| e^{-t\Delta_x^3} u_0 \|_{L_t^p(\dot{H}_x^{\frac{1}{p}, q})} \lesssim \| u_0 \|_2$$

Bem.: (1) Auf anderem Weg bewiesen von Kenig, Ponce & Vega, 1991. (Time decay + TT\*-Argument mit HLS in t; dieser Beweis erfasst auch den Endpunkt  $q = \infty, p = 4$ )

(2) Bei der Interpolation werden die Ableitungen erst veran- (216)  
 heret. Dazu benötigt man weiterführende Interpolationssätze als bisher besprochen: Interpolationssatz für vektorwertige (hier:  $\mathbb{H}^s, q$ -wertige)  $L^p$ -Räume, oder eine Theorie über die Interpolation von analytischen Familien von Operatoren. Alternative: Riesz-Theorie für gemischte  $L_t^p(L_x^q)$ -Räume wird mit einer Littlewood-Paley-Zerlegung konstruiert.

(3) Der maximale Ableitungswert beträgt  $I^{\frac{1}{4}}$  in der Endpunkt-Strichartz-Abschätzung. In der entsprechenden Abschätzung für die inhomogene Gleichung hat man also maximal eine halbe Ableitung Gewinn - nicht ausreichend für die typische Nichtlinearität  $\partial_x(u^{k+1})$  bei  $g \geq 3$ !

(4)  $X_{s,b}$ -Version: Für  $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$  und  $\frac{2}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$  sowie  $b > \frac{1}{2}$ :

$$\| I^{\frac{1}{p}} u \|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \| u \|_{X_{0,b}}$$

aufgrund des "Transfer-Prinzips".

Damit kommen wir zu einer Gruppe von linearen Abschätzungen, die eine stärkere Glättung aufweist, wenn man zuerst in der Zeitvariablen integriert, also von der Strichartz-Norm  $\| \cdot \|_{L_t^p(L_x^q)}$  übergeht zu  $\| \cdot \|_{L_x^p(L_t^q)}$ . Diese Beobachtung geht zurück auf Tosio Kato, die folgende scharfe Version ist wieder aus der  $g$ -ter Arbeit von Kenig, Ponce & Vega:

Lemma 3: Es gibt ein  $C_0 > 0$ , so dass

(217)

Kato-Smoothing  $\| \partial_x e^{-t\partial_x^3} u_0(x) \|_{L_t^2 L_x^2} = C_0 \| u_0 \|_{L_x^2}$  (für alle  $x \in \mathbb{R}$ ).

Bew.: Konstanten  $C > 0$  können von "=" zu " $\leq$ " wechseln.

Wir schreiben  $\partial_x e^{-t\partial_x^3} u_0(x) = c \int_{\mathbb{R}} \xi e^{ix\xi + t\xi^3} \hat{u}_0(\xi) d\xi$

und substituieren  $y = \xi^3 \Rightarrow dy = 3\xi^2 d\xi$ ,  $\xi = \text{sign}(y) \sqrt[3]{|y|} =: \xi(y)$

Dabei ist  $x$  bleibt fest bei dieser Rechnung!

$$\begin{aligned} \partial_x e^{-t\partial_x^3} u_0(x) &= c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi(y) + ty} \frac{1}{\xi(y)} \hat{u}_0(\xi(y)) dy \\ &= c \cdot \mathcal{F}_t^{-1} g_x(\cdot) \end{aligned}$$

mit  $g_x(y) = e^{ix\xi(y)} \frac{1}{\xi(y)} \hat{u}_0(\xi(y))$ . Nach Plancherel also

$$\begin{aligned} \| \partial_x e^{-t\partial_x^3} u_0(x) \|_{L_t^2 L_x^2}^2 &= c \| g_x \|_{L_y^2}^2 = c \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\xi(y)|^2} |\hat{u}_0(\xi(y))|^2 dy \\ &= c \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Substitution oben rückgängig gemacht wurde.

Folgerung: Für  $b > \frac{1}{2}$  gelten

$$\| \partial_x u \|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \| u \|_{X_{0,b}} \quad \text{und} \quad \| \partial_x u \|_{X_{0,-b}} \lesssim \| u \|_{L_x^1 L_t^2}.$$

(Trautner-Prinzip und Duality.)

Um diesen Glättungseffekt in einem Fixpunktargument oder für  $X_{3b}$ -Abschätzungen der Nichtlinearitäten einsetzen zu können, muß man ihn komplexwertigen durch reelle Abschätzungen in  $L_x^p L_t^q$ -Normen,

und der Diagonalfall der Strichartz-Abschätzungen ist hierfür in der Regel nicht ausreichend. Was man benötigt, ist die folgende Maximal-Funktions-Abschätzung, deren Beweis aussprechsvoller ist und daher nur skizziert werden kann.

Lemma 4 (Max.-fct.-est.): Es gilt

$$\| \sup_{t \in \mathbb{R}} |e^{-t\partial_x^3} u_0| \|_{L_x^4} \lesssim \| u_0 \|_{H_x^{\frac{1}{4}}}.$$

(X<sub>85</sub>-Version:  $\| u \|_{L_x^4 L_t^\infty} \lesssim \| u \|_{X_{4,b}^{\frac{1}{4}}}$ ,  $b > \frac{1}{2}$ . Bei dieser Abschätzung verliert man sogar  $\frac{1}{4}$  Ableitung!)

Beweisskizze: Für die Fundamentallösung

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + it\xi^3} d\xi \quad (\text{kann im reellen als Multiplikatives } \mathbb{R}\text{-Integral aufgefasst werden.})$$

von  $u_t + u_{xxx} = 0$  mit  $u(t=0) = \delta_0$  zeigt man

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + it\xi^3} \frac{d\xi}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} \right| \lesssim |x|^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{"van der Corput-Lemma" bzw. stat. Phase } \rightarrow \text{ggf Semi-klas.})$$

wobei die implizite Konstante unabhängig von  $t$  ist.

Hieraus folgt

$$\sup_t |e^{-t\partial_x^3} D_x^{-\frac{1}{2}} u_0| \lesssim |x|^{-\frac{1}{2}} * |u_0|(x)$$

~~bzw.~~ allgemeiner für die Lösung der inhomogenen Gl.

$$\left| \int_{\mathbb{I}_t} D_x^{-\frac{1}{2}} e^{-(t-t')\partial_x^3} f(t') dt' \right| \lesssim |x|^{-\frac{1}{2}} * \int_{\mathbb{R}} |f(t')| dt'$$



HLS - jetzt mit  $|x|^{-\frac{1}{2}} \in L^{2,\infty}$  ergibt

$$\left\| \int_{I_t} D_x^{-\frac{1}{2}} e^{-(t-t')\partial_x^3} f(t') dt' \right\|_{L_x^4 L_t^\infty} \lesssim \|f\|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_t^1}$$

Nach symmetrischer Verteilung der Lebesgue Ableitung ergibt das TTR-Argument gerade die Beh.

### 3.4.2 Subkritische LWP-Theorie für gKdV

Hier zeigen wir für einige  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzungen

$$\left\| \partial_x \prod_{j=1}^{k+1} u_j \right\|_{X_{sb}^b} \lesssim \prod_{j=1}^{k+1} \|u_j\|_{X_{sb}^{b_j}}$$

mit  $b > \frac{1}{2}$  und  $b_j > b - 1$ , die zu lokaler Wellenlosgleichheit in  $H^s(\mathbb{R})$  führen. Dabei können wir wg. der Symmetrie in den  $k+1$  Faktoren bei Bedarf annehmen, dass

$$|\xi_1| \geq |\xi_2| \geq \dots \geq |\xi_{k+1}|,$$

wobei  $\xi_j$  die zu  $u_j$  gehörende Wellenzahl ist.

(1)  $k=2$  (uKdV). Hier haben wir für  $b' \leq 0$  und  $s \geq \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \left\| \partial_x (u_1 u_2 u_3) \right\|_{X_{sb}^{b'}} &\lesssim \left\| (\mathcal{J}^s \partial_x u_1) u_2 u_3 \right\|_{L_x^2 L_t^\infty} \\ &\leq \left\| \mathcal{J}^s \partial_x u_1 \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \|u_2\|_{L_x^4 L_t^\infty} \|u_3\|_{L_x^4 L_t^\infty} \lesssim \prod_{j=1}^3 \|u_j\|_{X_{sb}^{b_j}}, \end{aligned}$$

wobei wir mit dem Kato-Effekt für den ersten Faktor und der max. fct.-Abschätzung für die anderen Faktoren, also mit linearen Abschätzungen ausgetauscht sind. Dieses Ergebnis lässt sich (und wurde zuerst) ohne  $X_{sb}$ -Normen zeigen (gezeigt). Es geht hier deshalb so

leicht, weil wir weit entfernt sind vom critical case, aber wie wir festgestellt haben, ist  $s \geq \frac{1}{4}$  auf der  $H^s$ -Skala das bestmögliche Ergebnis.

(2)  $k=4$  (quintic nonlinearity). Für  $b > \frac{1}{2}$  haben wir unter der o.g. Symmetrieannahme

$$\begin{aligned} \|\partial_x \prod_{j=1}^5 u_j\|_{X_{0,-b}} &\lesssim \|\prod_{j=1}^5 u_j\|_{L_x^1 L_t^2} \quad (\text{Dualversion Kato}) \\ &\lesssim \left\| \left( \prod_{j=1}^3 D_x^{\frac{1}{6}} u_j \right) (D_x^{-\frac{1}{4}} u_4) (D_x^{-\frac{1}{4}} u_5) \right\|_{L_x^1 L_t^2} \\ &\lesssim \underbrace{\frac{3}{\prod_{j=1}^3} \|D_x^{\frac{1}{6}} u_j\|_{L_{xt}^6}}_{\text{Strichartz}} \underbrace{\frac{5}{\prod_{j=4}^5} \|D_x^{-\frac{1}{4}} u_j\|_{L_x^4 L_t^\infty}}_{\text{max.-fct.}} \lesssim \frac{5}{\prod_{j=1}^5} \|u_j\|_{X_{0,b}} \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \|\prod_{j=1}^5 \partial_x u_j\|_{L_{xt}^2} &\lesssim \|( \prod_{j=2}^5 \partial_x u_j ) \cdot u_1|_{L_{xt}^2} \\ &\lesssim \|\prod_{j=2}^5 \partial_x u_j\|_{L_x^\infty L_t^2} \prod_{j=2}^5 \|u_j\|_{L_x^6 L_t^\infty} \\ &\lesssim \underbrace{\|u_1\|_{X_{5,b}}}_{\text{Kato}} \cdot \underbrace{\frac{5}{\prod_{j=2}^5} \|D_x^{\frac{1}{6}} u_j\|_{L_x^4 L_t^\infty}}_{\text{Sob., dann max.-fct.}} \lesssim \frac{5}{\prod_{j=1}^5} \|u_j\|_{X_{5,b}} \quad \text{sofern } b \geq \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Fetzt multilineare Interpolation zwischen

$X_{0,-b}$  und  $X_{5,0}$  auf der linken und zwischen

~~$X_{0,b}$~~  und  $X_{5,b}$  auf rechten Faktor der rechten Seite.

Dies ergibt:

Zu jedem  $s > 0$  existiert ein  $b' > -\frac{1}{2}$ , so dass für alle  $b > \frac{1}{2}$  (221)

$$\| \partial_x \prod_{j=1}^5 u_j \|_{X_{sb'}} \lesssim \prod_{j=1}^5 \| u_j \|_{X_{sb}}$$

gibt. Hierbei kann  $\frac{1}{2} < b < b' + 1$  gewählt werden, so dass wir LWP in  $H^s(\mathbb{R})$  für  $s > 0$  erhalten. ( $L^2 = H^0$  ist hier der "critical space".) Kombiniert man dieses Argument mit zusätzlichen Sobolev-Einschätzungen, erhält man auch für  $k \geq 5$  LWP im subkritischen Bereich, d.h.

$$\text{für } s > s_c(k) = \frac{1}{2} - \frac{2}{k}.$$

Nieder haben lineare Abschätzungen gezeigt. Verschiebt man auf das  $X_{sb}$ -framework, kann man den critical case erreichen (weil dafür an anderer Stelle mehr tun, z.B. Abschätzungen für die inhomogene lineare Gleichung erbringen).

(3)  $k=1$  (KdV): Hier kann man LWP in  $H^s(\mathbb{R})$  für  $s > -\frac{3}{4}$  erreichen (Kenig, Ponce & Vega, 1996), vorausgegangen war das  $L^2(\mathbb{R})$ -Ergebnis von Bourgain (1993), das auch den Schluss auf GWP erlaubte. (Das beste, was man mit linearen Abschätzungen allein erreichen kann, ist  $s > \frac{3}{4}$ .) Behauptet wird:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Sei } s > -\frac{3}{4}. \text{ Dann existieren } b' > -\frac{1}{2} \text{ und } b \in (\frac{1}{2}, b'+1), \\ \text{so dass } \| \partial_x (uv) \|_{X_{sb'}} \lesssim \| u \|_{X_{sb}} \| v \|_{X_{sb}}. \end{array} \right.$$

Die wesentlichen Argumente aus dem Beweis:

(222)

(1) Man definiert  $f(\xi, \xi) = \langle \xi - \xi^3 \rangle^b \langle \xi \rangle^s \hat{u}(\xi, \xi)$  und

$g(\xi, \xi) = \langle \xi - \xi^3 \rangle^b \langle \xi \rangle^s \hat{v}(\xi, \xi)$ , so dass  $\|f\|_{L^2_{\xi, \xi}} = \|u\|_{X_{sb}}$  und

$\|g\|_{L^2_{\xi, \xi}} = \|v\|_{X_{sb}}$ . Hierbei kann man  $f, g \geq 0$  annehmen.

Dann gilt

$$\|\partial_x(uv)\|_{X_{sb}} \lesssim \|u\|_{X_{sb}} \|v\|_{X_{sb}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\underbrace{\langle \xi \rangle^s \langle \xi - \xi^3 \rangle^b}_{=: \sigma} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_1 - \xi_1^3 \rangle^{-b}}_{=: \sigma_1} f(\xi_1, \xi_1) \underbrace{\langle \xi_2 \rangle^{-s} \langle \xi_2 - \xi_2^3 \rangle^{-b}}_{=: \sigma_2} g(\xi_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2\|_{L^2_{\xi, \xi}} \\ \lesssim \|f\|_{L^2_{\xi, \xi}} \|g\|_{L^2_{\xi, \xi}} \end{aligned}$$

Nun wird das Integrationsgebiet zerlegt und die Teilbereiche werden mit unterschiedlichen Argumenten bearbeitet. Dabei erledigt man zuerst einige leichte Probleme mit

(2) Kleinstwellenzahlen

2.1  $|\xi_1| \leq 2$  und  $|\xi_2| \leq 2 \Rightarrow |\xi| \leq 4.$

Der Betrag aus diesem Bereich ist beschränkt durch ( $b \geq 0$ !)

$$\begin{aligned} \|(P_2 u)(P_2 v)\|_{L_{xt}} &\lesssim \|P_2 u\|_{L_{xt}} \|P_2 v\|_{L_{xt}} \\ \stackrel{\text{Sob}_x}{\lesssim} \|P_2 u\|_{L_t(L_x)} \|P_2 v\|_{L_t(L_x)} &\stackrel{\text{Sob}_t}{\lesssim} \|P_2 u\|_{X_{0, \frac{1}{4}}} \|P_2 v\|_{X_{0, \frac{1}{4}}} \\ &\lesssim \|u\|_{X_{s, \frac{1}{4}}} \|v\|_{X_{s, \frac{1}{4}}} \quad (s \in \mathbb{R} \text{ beliebig, wg. der Projektoren } P_2) \end{aligned}$$

2.2  $|\xi_1| \geq 2$  und  $|\xi_2| \leq 1 \Rightarrow |\xi| \sim |\xi_1| \sim |\xi_1 - \xi_2|.$

Letztes. Dabei wir  $\langle \xi \rangle^s \langle \xi_1 \rangle^{-s} \leq C$  und  $|\xi| \lesssim |\xi_1|^{\frac{1}{2}} |\xi_1 - \xi_2|^{\frac{1}{2}}$ ,

so dass sich die Bel. für diesen Beitrag (wg.  $b' \le 0$ ) reduziert auf

$$\| I^{\frac{1}{2}} I_-^{\frac{1}{2}}(u, v) \|_{L^2_{x,t}} \leq \|u\|_{X_{ob}} \|v\|_{X_{ob}} \quad (b > \frac{1}{2} \text{ bel.}),$$

was gerade die  $X_{ob}$ -Version der bilinear Strichartz-Abschätzung ist.

Genauso für  $|s_1| \leq 1, |s_2| \geq 2,$

um folgendes können wir also  $|s_1| \sim \langle s_1 \rangle$  und  $|s_2| \sim \langle s_2 \rangle$  annehmen.

(3) Die Resonanzrelationen

$$\begin{aligned} |s - s_1 - s_2| &= |s - s_1^3 - s_2 + s_1^3 - s_2 - s_2^3| = |(s_1 + s_2)^3 - s_1^3 - s_2^3| \\ &= 3 |s_1 + s_2| |s_1| |s_2| = 3 |s_1 s_2| \text{ und damit} \end{aligned}$$

$$|s_1 s_2|^{-b'} \leq \max(\langle s \rangle^{-b'}, \langle s_1 \rangle^{-b'}, \langle s_2 \rangle^{-b'})$$

Wir können also mit den "gemischten Gewichten"  $\langle s \rangle, \langle s_i \rangle$  bis zu  $3/2 - \epsilon$  Ableitungen kontrollieren.

Um folgendes beschränke sich viel auf den Fall  $\langle s \rangle$  maximal, die anderen Fälle erweisen sich "by duality" wie wesentliches als äquivalent dazu. Der Betrag dieser Region ist beschränkt durch

$$(*) \| \langle s \rangle^s |s|^{1+b'} \int_{\mathbb{R}^2} \langle s_1 \rangle^{s+b'} \langle s_1 \rangle^{-b} f(s_1, z_1) \langle s_2 \rangle^{s+b'} \langle s_2 \rangle^{-b} g(s_2, z_2) ds_1 ds_2 \|_{L^2_{s_2}} \|_{L^2_{s_1}}$$

und jetzt wird eine weitere Fallunterscheidung erforderlich.

(4) Wir nehmen o.E.  $s \leq -\frac{1}{2}$  an und setzen  $b' = -\frac{1}{2} + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Subcase 1:  $\max(|\xi_1|, |\xi_2|) \lesssim |\xi|$ . Hier haben wir

$$\begin{aligned} & \langle \xi \rangle^s |\xi|^{1+b'} \langle \xi_1 \rangle^{-s+b'} \langle \xi_2 \rangle^{-s+b'} \\ &= \langle \xi \rangle^s |\xi|^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \langle \xi_1 \rangle^{-s-\frac{1}{2}+\varepsilon} \langle \xi_2 \rangle^{-s-\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \varepsilon > 0 \text{ so klein, dass} \\ & \lesssim \langle \xi_1 \rangle^{-s+\frac{s}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3\varepsilon}{2}} \langle \xi_2 \rangle^{-s-\frac{1}{2}+\frac{3\varepsilon}{2}} \quad s+\frac{1}{2}+\varepsilon \leq 0 \quad \nabla \end{aligned}$$

Beitrag zu (\*) kann diesen subcase

$$\lesssim \left\| \int \left| \xi_1^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3\varepsilon}{2}} u \right|_{L_{xt}^4} \left\| \int \left| \xi_2^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3\varepsilon}{2}} v \right|_{L_{xt}^4} = 1 (**)$$

Jetzt benötigen wir noch eine  $L_{xt}^4$ -Abschätzung, die wir durch

Interpolation von

$$\| D_x^{\frac{1}{6}} u \|_{L_{xt}^6} \lesssim \| u \|_{X_{0, \frac{1}{2}+}} \quad \text{und} \quad \| u \|_{L_{xt}^2} = \| u \|_{X_{00}}$$

fließen, sofern

$$\frac{1}{4} = \frac{1-\theta}{6} + \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \theta \left(1 - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{2\theta}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (1-\theta) = \frac{3}{4}$$

und die Ableitungspotenz dabei ist  $(1-\theta) \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$ .

$$\text{Also haben wir } \| D_x^{\frac{1}{8}} u \|_{L_{xt}^4} \lesssim \| u \|_{X_{0\beta}} \lesssim \| u \|_{X_{0, \frac{1}{2}+}} \quad (\beta = \frac{3}{8} +)$$

Demnach ist

$$(**) \lesssim \left\| \int \left| \xi_1^{\frac{s}{2}-\frac{3}{8}+\frac{3\varepsilon}{2}} u \right|_{X_{0\beta}} \left\| \int \left| \xi_2^{-\frac{s}{2}-\frac{3}{8}+\frac{3\varepsilon}{2}} v \right|_{X_{0\beta}} \lesssim \| u \|_{X_{0\beta}} \| v \|_{X_{0\beta}}$$

sofern  $s \geq \frac{s}{2} - \frac{3}{8} + \frac{3\varepsilon}{2}$ , was gilt, wenn  $s > -\frac{3}{4}$ .

Subcase 2:  $|\xi| \ll \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$

In diesem Fall ist  $|\xi_1| \sim |\xi_2| \leq |\xi_1 - \xi_2|$  und

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle^s |\xi|^{1+b'} \langle \xi_1 \rangle^{-s+b'} \langle \xi_2 \rangle^{-s+b'} & \lesssim \underbrace{\langle \xi \rangle^s |\xi|^{\frac{1}{2}}}_{\leq 1} \underbrace{|\xi_1|^{-\frac{1}{2}} |\xi_2|^{-\frac{1}{2}}}_{\text{Symbol von } I^{\frac{1}{2}} I^{-\frac{1}{2}}} \langle \xi_1 \rangle^{-s-\frac{3}{4}+\varepsilon} \langle \xi_2 \rangle^{-s-\frac{3}{4}+\varepsilon} \end{aligned}$$

und der Betrag von diesem Fall zu (\*) ist beschränkt durch

(225)

$$\| I^{\frac{1}{2}} I_-^{\frac{1}{2}} (J^{-\frac{3}{4}+\varepsilon} u, J^{-\frac{3}{4}+\varepsilon} v) \|_{L^2_t} \lesssim \|u\|_{X_{sb}} \|v\|_{X_{sb}}$$

aufgrund der bilinearen Abschätzung, sofern  $s \geq -\frac{3}{4} + \varepsilon$ , also ebenfalls für  $s > -\frac{3}{4}$ .

Abschließende Bem. zu gKdV-3 (quartic nonlinearity):

Das beste Ergebnis, was man allein mit linearen Abschätzungen erreichen kann, ist LWP in  $H^s(\mathbb{R})$  für  $s \geq \frac{1}{12}$  (KPV).

Mit  $X_{sb}$ -Normen unter starkem Gebrauch der bilinearen

Abschätzung:  $s > -\frac{1}{6} = s_c$  (und damit GWP in  $L^2(\mathbb{R})$ ) (AG.)

Wurde bis zum critical case "gepushed" (Tao).