ÜBUNGEN ZU NICHTLINEARE DISPERSIVE GLEICHUNGEN

Aufgabe 1 (6 P.) Bereits 1872 leitete Joseph Valentin Boussinesq die folgende, später nach ihm benannte 1 + 1-dimensionale Modellgleichung

$$(1) \quad u_{tt} - u_{xx} \pm u_{xxxx} = (u^2)_{xx}$$

für die Ausbreitung von Oberflächenwellen in einem Kanal her¹. Bestimmen Sie - ähnlich wie dies in der Vorlesung für die Klein-Gordon-Gleichung durchgeführt wurde - ein äquivalentes System erster Ordnung (bezüglich der Zeitvariable t). Welche Phasenfunktionen treten bei welchem Vorzeichen auf, und bei welcher Vorzeichenwahl ist (1) eine Wellengleichung? Geben Sie auch an, wie sich die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{und} \quad u_t(x, 0) = u_1(x)$$

bei der Umwandlung in ein System 1. Ordnung transformieren.

Aufgabe 2 (7 P.) Lösen Sie mit der in der Vorlesung vorgestellten Fourierrechne die Dirichlet-Problem

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0; \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

für die Laplace-Gleichung in der oberen Halbebene $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Die inverse Fouriertransformierte der Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (dies sollte eine $L^1(\mathbb{R})$ -Funktion der Variable ξ sein) lässt sich in diesem Fall gut berechnen. Sie sollten den sogenannten "Poissonkern für die obere Halbebene" erhalten.

Bitte wenden!

¹Boussinesq, J.: Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. J. Math. Pures Appl. (2) 17 (1872), 55 - 108. Bei Wahl des positiven Vorzeichens in (1) spricht man von der "good", andernfalls von der "bad" Boussinesq equation.

Aufgabe 3 (Energieerhaltung, 8 P.) Zeigen Sie durch formale Rechnung, dass für (glatte und schnell fallende) Lösungen $u : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{C}$ der nichtlinearen Klein-Gordon-Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u \pm |u|^{p-1} u = 0$$

die Energie

$$E(u(t)) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 + m^2 |u(x, t)|^2 \pm \frac{2}{p+1} |u(x, t)|^{p+1} dx$$

zeitlich konstant, also eine Erhaltungsgröße ist. Multiplizieren Sie dazu die Gleichung mit $\bar{u}_t$ und integrieren Sie den Realteil des Ergebnisses über den $\mathbb{R}^n$. Was ändert sich an Rechnung und Ergebnis, wenn die Gleichung einen zusätzlichen Dämpfungsterm u_t enthält, also

$$u_{tt} + u_t - \Delta u + m^2 u \pm |u|^{p-1} u = 0$$

lautet?

Abgabe: 30.10.2017, in der Vorlesung,

Besprechung: 03.11.2017