

ÜBUNGEN ZU NICHTLINEARE DISPERSIVE GLEICHUNGEN

Problem 1 (2+2+1+7+3+5=20 P.) Im Folgenden soll das Anfangswertproblem $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ mit $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ für die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$y'' = y - 2y^3$$

untersucht werden. (In den Aufgabenteilen (a) bis (d) handelt es sich um die Rekapitulation von Argumenten aus der Vorlesung Analysis II, Kapitel über gewöhnliche Differenzialgleichungen.)

- (a) Führen Sie die neue Variable $x := (x_1, x_2)^\top := (y, y')^\top$ ein und geben Sie ein äquivalentes System erster Ordnung für x an.
- (b) Bestimmen Sie ein dazu wiederum äquivalentes System von Integralgleichungen.
- (c) Geben Sie eine Abbildung

$$\Lambda : C([0, T], \mathbb{R}^2) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R}^2)$$

an, so dass das in Teil (b) bestimmte Integralgleichungssystem die Fixpunktgestalt $\Lambda x = x$ annimmt.

$C([0, T], \mathbb{R}^2)$ sei versehen mit der Maximumsnorm

$$\|x\|_\infty := \max_{0 \leq t \leq T} |x_1(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |x_2(t)|$$

und der dadurch in natürlicher Weise induzierten Metrik $d(x, \tilde{x}) := \|x - \tilde{x}\|_\infty$. Für $R > 0$ sei $\overline{B}_{R,T}$ die abgeschlossene Kugel vom Radius R um den Nullpunkt in $(C([0, T], \mathbb{R}^2), \|\cdot\|_\infty)$, so dass $(\overline{B}_{R,T}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

- (d) Bestimmen Sie einen Radius $R = R(y_0, y_1) > 0$ und ein $T = T(R) > 0$, so dass $\Lambda : \overline{B}_{R,T} \rightarrow \overline{B}_{R,T}$ eine Kontraktion ist. (Ihre Wahl ist ausreichend scharf, wenn Sie ein $\varepsilon_0 > 0$ finden, so dass die einmalige Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes eine eindeutige Lösung mit der Lebensdauer $T \geq \frac{\varepsilon_0}{1+4(|y_0|+|y_1|)^2}$ liefert.)

Bitte wenden!

(e) Zeigen Sie, dass für jede Lösung $y \in C^2([0, T], \mathbb{R})$ der Dgl. $y'' = y - 2y^3$ die Größe

$$E(y(t)) := \frac{1}{2}y'^2(t) - \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{1}{2}y^4(t)$$

unabhängig von t , also eine Erhaltungsgröße ist. Multiplizieren Sie dazu die Gleichung mit $y'(t)$ und integrieren Sie einmal.

(f) Folgern Sie, dass das eingangs gestellte Anfangswertproblem mit $y_0 = 1$ und $y_1 = 0$ eine eindeutige *globale* Lösung $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ besitzt.

Aufgabe 4 (1+2+3+1=7 P.) Es seien $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und u eine reelle, glatte und schnell fallende Lösung der verallgemeinerten KdV-Gleichungen

$$u_t + u_{xxx} + \lambda(u^{k+1})_x = 0.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Integrale Erhaltungsgrößen sind:

$$I_0(u(t)) := \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx, \quad I_1(u(t)) := \int_{\mathbb{R}} u(x, t)^2 dx, \quad I_2(u(t)) := \int_{\mathbb{R}} u_x(x, t)^2 - \frac{2\lambda}{k+2} u(x, t)^{k+2} dx.$$

Wie sind die Erhaltungsgrößen und die Rechnungen zu modifizieren, wenn die Lösung u reell, glatt und 2π -periodisch in der Raumvariable x ist?

Aufgabe 5 (6 P.) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 4 auf die (in zweifacher Hinsicht) verallgemeinerte Benjamin-Ono-Gleichung

$$u_t - |D_x|^\alpha u_x + \lambda(u^{k+1})_x = 0.$$

Hierbei ist $\alpha > 0$, beachten Sie die Übereinstimmung für $\alpha = 2$. Vertauschen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $|D_x|^\alpha$? Um den Operator $|D_x|^\alpha$ zu verarbeiten, ist die Parseval'sche Gleichung (auch: Plancherel-Identität) $\langle u, v \rangle_{L_x^2} = \langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{L_\xi^2}$ nützlich.

Abgabe: 06.11.2017, in der Vorlesung,

Besprechung: 10.11.2017