Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2017/18
19.12.2017
Blatt 9

ÜBUNGEN ZU NICHTLINEARE DISPERSIVE GLEICHUNGEN

Problem 8 (Strichartz-Abschätzungen mit Ableitungsgewinn für die Wärmeleitungsgleichung. 1+4+2+2+1=10 P.) Es seien $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $u \in C([0,\infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ gegeben durch $u(x,t) = e^{t\Delta}u_0(x)$, also u eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert u_0. Ferner sei für $f \in C([0,\infty), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$

$$F(x,t) := \int_0^t e^{(t-t')\Delta} f(x,t')dt',$$

also F eine Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial F}{\partial t} - \Delta_x F = f$, $F(t=0) = 0$.

(a) Folgern Sie aus den Ergebnissen der Aufgaben 9 und 15, dass für $s \geq 0$ und $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q}$ gilt

$$\||D_x|^s u(t)\|_{L^p_x} \lesssim t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{s}{2}} \|u_0\|_{L^q_x}.$$

(b) Unter welchen Voraussetzungen an den Sobolev-Exponenten s und an die Kehrwerte $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\sigma}$, $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ der unten auftretenden Hölder-Exponenten können Sie die Raum-Zeitabschätzung

$$\||D_x|^s F\|_{L^\rho_t([0,\infty),L^p_x)} \lesssim \|f\|_{L^\sigma_t([0,\infty),L^q_x)}$$

beweisen? Führen Sie die Einzelheiten aus. (Können Sie $s = 2$ für irgendeine Kombination von ρ, σ, p, q zulassen?)

(c) Worauf reduzieren sich die in (b) bestimmten Bedingungen, wenn zusätzlich $\sigma = \rho'$ und $q = p'$ verlangt ist? Stimmen diese für $s = 0$ mit denen für die Strichartz-Abschätzungen für die Schrödinger-Gleichung überein?

(d) Untersuchen Sie, ob unter den in (c) ermittelten Voraussetzungen auch die Abschätzung

$$\|TT^*f\|_{L^\rho_t([0,\infty),L^p_x)} \lesssim \|f\|_{L^{\rho'}_t([0,\infty),L^{p'}_x)}$$

gilt, wenn $T : L^2_x \to L^\rho_t([0,\infty)L^p_x)$ durch $Tu_0(x,t) := |D_x|^{\frac{s}{2}} e^{t\Delta}u_0(x)$ gegeben ist.

(e) Welche Stetigkeitsabschätzung für T ergibt jetzt das TT^* - Argument?

Bitte wenden!

Aufgabe 19 (Pseudokonforme Invarianz der L^2-kritischen NLS, 8 P.) Für eine Funktion $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ und $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert man

$$T_\omega u(x,t) := (1+\omega t)^{-\frac{n}{2}} \exp\big(i\frac{\omega|x|^2}{4(1+\omega t)}\big) u\big(\frac{x}{1+\omega t}, \frac{t}{1+\omega t}\big).$$

T_ω wird als pseudokonforme Transformation bezeichnet, der Definitionsbereich von $T_\omega u$ ist $\mathbb{R}^n \times (-\frac{1}{\omega}, \infty)$, falls $\omega > 0$ ist, andernfalls $\mathbb{R}^n \times (-\infty, -\frac{1}{\omega})$. Zeigen Sie: Ist u eine Lösung von

$$iu_t + \Delta u \pm |u|^{\frac{4}{n}} u = 0,$$

so auch $T_\omega u$ (Ginibre/Velo, 1979).

Aufgabe 20 (Blow-up, 4+1+3+1=9 P.) Wählt man im Ergebnis von Problem 2 (c) den Exponenten $p = 5$ und die Geschwindigkeit $c = 0$, so erhält man mit

$$u(x,t) = \exp\big(\frac{it}{3}\big) y^{\frac{1}{2}}\big(\frac{2x}{\sqrt{3}}\big), \qquad\qquad y(z) = \operatorname{sech}(z)$$

eine spezielle Lösung der L^2-kritischen NLS

$$iu_t + u_{xx} + |u|^4 u = 0$$

in einer Raumdimension. Bestimmen Sie hierfür $v(x,t) = T_{-1}u(x,t)$ (T_ω aus Aufgabe 19), und zeigen Sie, dass für $0 \le t < 1$ gilt

$$\|\partial_x v(t)\|_2 \gtrsim \frac{1}{1-t},$$

was $\lim_{t\to 1^-} \|v(t)\|_{1,2} = \infty$ impliziert. Berechnen Sie ferner

(i) für $x \neq 0$ den punktweisen Grenzwert $\lim_{t\to 1^-} v(x,t)$ und

(ii) $\mathcal{S}' - \lim_{t\to 1^-} |v(\cdot,t)|^2$.

Wie kann man den "Blow-up-Mechanismus" mit einem Stichwort beschreiben?

Abgabe: 08.01.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 12.01.2018