

ÜBUNGEN ZU FOURIERANALYSIS

3. (2 P.) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{-n-\delta}$$

konvergiert. (Um den Satz von Fubini anwenden zu können, ist es sinnvoll, die Reihe als Integral nach dem Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$ aufzufassen.)

4. (6 P.) Verifizieren Sie die folgenden Rechenregeln zur Bestimmung von Fourierkoeffizienten und -reihen. Hierbei seien $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$.

- (a) Ist $g(x) = f(-x)$, so gilt $\hat{g}(k) = \hat{f}(-k)$,
- (b) ist f gerade, so folgt

$$\hat{f}(k) = \hat{f}(-k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx,$$

und die Fourierreihe von f ist gegeben durch

$$S_N f(x) = \hat{f}(0) + 2 \sum_{k=1}^N \hat{f}(k) \cos(kx).$$

- (c) Ist f ungerade, so gilt

$$\hat{f}(k) = -\hat{f}(-k) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx,$$

insbesondere $\hat{f}(0) = 0$, und für die Fourierreihe von f hat man

$$S_N f(x) = 2i \sum_{k=1}^N \hat{f}(k) \sin(kx).$$

- (d) $\widehat{\hat{f}}(k) = \hat{f}(-k)$,
- (e) für alle $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_{-\pi-a}^{\pi-a} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

- (f) ist $g(x) = f(x-a)$, so gilt $\hat{g}(k) = e^{-ika} \hat{f}(k)$.

Abgabe: 17.04.2023 (in der Vorlesung)
Besprechung: 24.04.2023