Kapitel 5

Lie-Theorie in der Physik

Da uns bestimmte Gruppen wie die $U(n)$ und $SU(n)$ immer wieder in der Physik begegnen (siehe z.B. den Zeitentwicklungs-Operator), wollen wir nun einen kleinen Abstecher in die Algebra machen und sehen, was Lie-Gruppen bzw. -Algebren mit der Physik zu tun haben. Wir bedienen uns dazu vornehmlich der zweiten Hälfte des Buches von Nadir Jeevanjee (*"An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists"*) und, für ein späteres Beispiel zur Zeitentwicklung, einer Arbeit von R.T. Sayer (*"Quantum Dynamics Using Lie Algebras, with Explorations in the Chaotic Behavior of Oscillators"*).

5.1 Rotationen im Raum

Beispiel 5.1.1 (Drehungen in 2D)**.** Betrachten wir den Ortsvektor $\mathbf{r} = (x, y)$. Eine Drehung um einen Winkel θ können wir als

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{=:R(\theta)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

schreiben. Die Menge aller Matrizen $R(\theta)$ mit $\theta \in [0, 2\pi)$ mit der gewöhnlichen Matrixmultiplikation als Verknüpfung können wir als Gruppe $SO(2)$ auffassen. Offensichtlich sind diese Matrizen vollständig über den Winkel θ parametrisiert. Schwammig ausgedrückt sind solche Gruppen, die über eine (oder mehrere) stetige Variablen parametrisiert werden können, sogenannte *Lie-Gruppen*.

Im Bereich der Lie-Gruppen werden wir uns auch mit "infinitesimalen Transformationen" bzw. "infinitesimalen Generatoren" auseinandersetzen. Wie wir sehen werden, sind diese Ableitungen der Lie-Gruppen-Elemente bezüglich der Paramater.
In unserem Beispiel aus der $SO(2)$ sollte ein Generator also eine Ableitung von $R(\theta)$ sein, ausgewertet an einer Stelle (hier: $\theta = 0$):

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: X \ . \tag{5.2}$$

Inwiefern ist dieses Element nun ein Generator von Rotationen? Betrachten wir den Vektor $\mathbf{r}_0 = (1, 0)$ und die Kurve $\mathbf{r}(\theta) := R(\theta) \cdot \mathbf{r}_0$. Letztere beschreibt die Kurve, die der Vektor zeichnet, wenn er rotiert wird. Der Tangentialvektor zu dieser Kurve ist dementsprechend $\mathbf{r}'(\theta = 0) = X\mathbf{r}_0$. Somit ist X die Matrix, welche durch Multiplikation mit dem Ortsvektor diejenige Richtung angibt, in welche sich der Ortsvektor ändert, wenn wir ihn drehen.

Beispiel 5.1.2 (Drehungen in 3D)**.** Für drei Raumdimensionen haben wir drei verschiedene Achsen, um welche wir drehen können. Die zugehörigen Matrizen lauten

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} , \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} , \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{5.3}$$

Somit gilt für die Generatoren

$$L_x := \frac{\mathrm{d}R_x}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad L_y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad L_z := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.4}$$

Die lineare Hülle $\mathrm{span}(L_x, L_y, L_z)$ spannt den Vektorraum der anti-symmetrischen 3×3-Matrizen auf, welchen wir $\mathfrak{so}(3)$ nennen.

Interessanterweise erfüllen die Matrizen die folgenden Kommutator-Relationen, welcher wir bereits in einem anderen Kontext im einführenden Kapitel zur Physik nachgerechnet haben (hier ohne $i\hbar$):

$$[L_x, L_y] = L_z , \qquad [L_y, L_z] = L_x , \qquad [L_z, L_x] = L_y . \tag{5.5}$$

Dies bedeutet, dass unser Vektorraum $\mathfrak{so}(3)$ unter der Bildung von Kommutatoren abgeschlossen ist. Solch einen Vektorraum bezeichnen wir (erneut: schwammig) als *Lie-Algebra*.

Dies wollen wir etwas besser verstehen. Betrachten wir noch einmal die Drehungen um die z-Achse, $R_z(\theta)$. Für eine kleine Drehung $\epsilon \ll 1$ können wir $R_z(\epsilon)$ als Reihenentwicklung (hier bis zur einschließlich ersten Ordnung) schreiben:

$$R_z(\epsilon) \approx R_z(0) + \epsilon \frac{\mathrm{d}R_z}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=0} = I + \epsilon L_z . \tag{5.6}$$

Eine Drehung um einen Winkel θ können wir als n-fache Ausführung einer kleineren Rotation um den Winkel θ/n auffassen, sodass

$$R_z(\theta) = [R_z(\theta/n)]^n \approx \left(I + \frac{\theta L_z}{n}\right)^n . \tag{5.7}$$

Wir erinnern uns an die Exponentialmatrix und schreiben im Limes $n \to \infty$ schließlich

$$R_z(\theta) = \exp(\theta L_z) . \tag{5.8}$$

Die Menge all dieser $R_z(\theta), \theta \in \mathbb{R}$, liefert offensichtlich eine Untergruppe der $SO(3)$.
Wenn wir $R_z(\theta)$ als Bild von θ bezüglich der Abbildung $R_z\colon \mathbb{R} \to SO(3)$ betrachten, so sehen wir, dass R_z ein Homomorphismus ist. Solche stetigen Homomorphismen von der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ in eine Matrix-Lie-Gruppe G ist eine sog. *einparametrige Untergruppe*.

Für eine einparametrige Untergruppe $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ wissen wir nach den Eigenschaften eines Homomorphismus allgemein, dass $\gamma(0) = I$. Definieren wir weiter $X := \mathrm{d}\gamma(0)/\mathrm{d}t$, so sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} &= \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(h+t) - \gamma(t)}{h} && (5.9)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(h) - \gamma(I)}{h}\gamma(t) && (5.10)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h} = X\gamma(t)\ . && (5.11)
\end{aligned}$$

Die Gleichung oben ist nichts anderes als eine gewöhnliche DGL mit der Lösung $\gamma(t) = e^{tX}$. Somit hat jede einparametrige Untergruppe die Form $\exp\colon \mathbb{R} \to G, t \mapsto e^{tX}$, und es gibt eine Korrespondenz zwischen den einparametrigen Untergruppen und den Matrizen X, sodass e^{tX} für alle $t \in \mathbb{R}$.

Stellen wir uns G als mehrdimensionalen Raum vor. Die einparametrige Untergruppe $\gamma(t) = e^{tX}$ sei eine parametrisierte Kurve in diesem Raum. Wir wissen, dass X der Tangentialvektor zu $\gamma(t)$ an der Identität ist. Tatsächlich können alle Matrizen X dermaßen interpetiert werden, sodass diese Matrizen den gesamten Tangentialraum zur Gruppe G am "Punkt" e aufspannen. Insgesamt erhalten wir also einen Vektorraum an Matrizen, welche Entsprechungen zu einparametrigen Untergruppen haben. Dies ist die Lie-Algebra zur Matrix-Lie-Gruppe:

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid e^{tX} \in G\ \forall t \in \mathbb{R}\}\ . \tag{5.12}$$

Bemerkung 5.1.3. Im physikalischen Kontext müssen wir etwas mit unserer Definition einer Lie-Algebra aufpassen. Viele physikalische Observablen können wir als Elemente von Lie-Algebren auffassen, die allerdings durch hermitesche Operatoren repräsentiert werden müssen. Uns würde aber auffallen, dass Elemente aus den Lie-Algebren $\mathfrak{o}(n), \mathfrak{u}(n)$ anti-hermitesche Operatoren liefern würden. Somit würde man in der Physik die leichte andere Definition

$$\mathfrak{g}_{\text{phys}} = \{X \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid e^{itX} \in G\ \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{5.13}$$

finden, um dieses Problem zu reparieren. Wir werden aber vorerst bei der mathematischen Version bleiben.

Satz 5.1.4. Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra zur Matrix-Lie-Gruppe G. Dann erfüllt $\mathfrak{g}$ die folgenden Punkte:

1. $\mathfrak{g}$ ist ein reeller Vektorraum;

2. $\mathfrak{g}$ is unter Kommutatorbildung abgeschlossen;

3. alle Elemente aus $\mathfrak{g}$ erfüllen die Jacobi-Identität.

Einen Beweis lassen wir an dieser Stelle aus.

Die Abgeschlossenheit unter Kommutatorbildung ist u.a. deswegen so interessant, da die algebraische Struktur unseres Kommutators auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eng mit der algebraischen Struktur des Produktes auf G verbunden ist.

Eine mathematische Aussage, in der die Verbindung zwischen Algebra und Gruppe deutlich wird, ist die sogenannte *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel* (BCH-Formel):

$$e^X e^Y = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + ...\right) , \tag{5.14}$$

für welche wir einen Spezialfall in der Übung beweisen werden. Die BCH-Formel wird sich in späteren Abschnitten zur Zeitentwicklung in physikalischen Systemen als nützlich erweisen, wo wir Ausdrücke mit Operatoren der Form $e^{\lambda X} Y e^{-\lambda X}$ durch verschachtelte Kommutatoren,

$$e^{\lambda X} Y e^{-\lambda X} = Y + \frac{\lambda}{1!}[X,Y] + \frac{\lambda^2}{2!}[X,[X,Y]] + \frac{\lambda^3}{3!}[X,[X,[X,Y]]] + \dots , \tag{5.15}$$

umschreiben können.

5.2 Eine Interpretation der Lie-Klammern

Bevor wir zu einem Beispiel aus der Quantenmechanik übergehen, in welchem wir die BCH-Formel nutzen, wollen wir noch etwas Intuition für die Lie-Klammer bzw. den Kommutator gewinnen.

Betrachten wir einen Tangentialvektor A aus unserer Lie-Algebra. Für eine Rotation g ist gAg^{-1} ebenfalls ein Tangentialvektor. Wir wollen uns nun eine Drehung von A nach gAg^{-1} anschauen. Da g eine Rotation und somit von einem Vektorfeld erzeugt ist, können wir dafür einen Ausdruck der Form e^B schreiben.
Wir führen die Funktion

$$f(t) := e^{tB} A e^{-tB} \tag{5.16}$$

ein, welche unsere Drehung von Start- zu Endpunkt für $t \in [0,1]$ beschreibt. Die Geschwindigkeit unserer Drehung wird sicherlich durch die Ableitung $f'(t)$ beschrieben. Betrachten wir dies für unseren Anfangspunkt, so sehen wir

$$\begin{aligned} f'(0) =& \lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} \\ =& \lim_{t\to 0} \frac{e^{tB} A e^{-tB} - A}{t} \\ \approx& \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[(1+tB)A(1-tB) - A\right] \\ \approx& \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[A + t(BA - AB) - A\right] \\ =& BA - AB = [B,A] , \end{aligned} \tag{5.17}$$

wobei wir jeweils Terme der Ordnung t^2 und höher vernachlässigt haben. Diese Ableitung $\mathrm{ad}_B A := f'(0)$, die uns eine Art Richtungsableitung definiert, nennen wir *adjungierte (Lie-Algebren-)Darstellung.*

5.3 Zeitentwicklung von Quantensystemen

Kommen wir nun zu einer physikalischen Anwendung, in welcher uns die Lie-Algebren zugute kommen. Wir interessieren uns für die zeitliche Entwicklung eines Quantensystems, welche wir mit der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H(x,p,t)\psi(x,t) \tag{5.18}$$

beschreiben können. Um die zeitliche Entwicklung zu bestimmen, benutzen wir die Operator-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial U(t)}{\partial t} = HU(t)\ , \tag{5.19}$$

wobei $U(t)$ den unitären Zeitentwicklungsoperator bezeichnet. Besitzt dieser ein Inverses $U^{-1}(t)$, so können wir die Gleichung zu

$$i\hbar\frac{\partial U(t)}{\partial t}U^{-1}(t) = H \tag{5.20}$$

umschreiben. Mit einem passenden Ansatz für die Struktur von $U(t)$ können wir dann für beliebige Hamiltonfunktionen die Gleichung lösen. Ein möglicher Ansatz nach Wei und Norman zerlegt U in ein Produkt

$$U(t) = \prod_{i=1}^{N} e^{\alpha_i(t)H_i}\ . \tag{5.21}$$

Hierbei seien die $\alpha_i(t)$ die zu bestimmenden zeitabhängigen, komplexen skalaren Parameter. Die H_i bilden die Basis einer Lie-Algebra $\mathfrak{A} = \{H_1, \ldots, H_N\}$, welche alle Terme des Hamiltonians H enthält. Anders ausgedrückt lässt sich der Hamiltonian als

$$H = \sum_{i=1}^{N} b_i(t)H_i \tag{5.22}$$

schreiben. Der Plan ist es nun, den Ausdruck $(\partial_t U)U^{-1}$ so zu faktorisieren, dass wir am Ende eine Gleichung

$$i\hbar\sum_{i=1}^{N} g_i(\dot{\alpha}_1(t), \ldots, \dot{\alpha}_N(t), \alpha_1(t), \ldots, \alpha_N(t))H_i = \sum_{i=1}^{N} b_i(t)H_i \tag{5.23}$$

erhalten, was einen System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung darstellt. Deren Lösung liefert uns die Koeffizienten α_i.

Beispiel 5.3.1. Wir folgen einem Beispiel, welches aus der Arbeit von R.T. Sayer, *“Quantum Dynamics Using Lie Algebras, with Explorations in the Chaotic Behavior of Oscillators”*, entnommen ist. Gegeben sei der Hamiltonian eines freien Teilchens, welches einer treibenden Kraft $f(t)$ unterliegt,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - f(t)x = H_0 - f(t)x\ . \tag{5.24}$$

Die Lie-Algebra, welchen unseren Hamiltonian enthält, ist

$$\mathfrak{A} = \{1, x, \partial_x, \partial_{xx}\} \ . \tag{5.25}$$

Zunächst sollten wir prüfen, dass $\mathfrak{A}$ tatsächlich eine Lie-Algebra ist, also insbesondere unter Kommutatorbildung abgeschlossen ist. Wir sehen schnell ein, dass

$$[1, x] = [1, \partial_x] = [1, \partial_{xx}] = 0 \ , \qquad [\partial_x, \partial_{xx}] = 0 \tag{5.26}$$

ist. Für die übrigen Kommutatoren sehen wir

$$[x, \partial_x] = -1 \ , \qquad [x, \partial_{xx}] = -2\partial_x \ . \tag{5.27}$$

Somit ist $\mathfrak{A}$ tatsächlich eine Lie-Algebra, die alle Terme unseres Hamiltonians beinhaltet. Unserem Ansatz zufolge schreiben wir den Zeitentwicklungsoperator nun als

$$U = e^{\alpha_1(t)} e^{\alpha_2(t)x} e^{\alpha_3(t)\frac{\partial}{\partial x}} e^{\alpha_4(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}} \ . \tag{5.28}$$

Wir schreiben die Operatorgleichung für H wie in (5.20) um, und erhalten

$$i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial t} e^{\alpha_1(t)} e^{\alpha_2(t)x} e^{\alpha_3(t)\frac{\partial}{\partial x}} e^{\alpha_4(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\right] \left(e^{-\alpha_4(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}} e^{-\alpha_3(t)\frac{\partial}{\partial x}} e^{-\alpha_2(t)x} e^{-\alpha_1(t)}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - f(t)x \ , \tag{5.29}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass U unitär ist. Nun müssen wir faktorisieren, wobei uns die BCH-Formel zur Hilfe kommen wird. Die zeitliche Ableitung liefert zunächst den länglichen Ausdruck (wir lassen der Übersichtlichkeit halber die t-Abhängigkeiten weg)

$$\begin{aligned} \partial_t U =& \dot\alpha_1 e^{\alpha_1} e^{\alpha_2 x} e^{\alpha_3\partial_x} e^{\alpha_4\partial_{xx}} + e^{\alpha_1}(\dot\alpha_2 x) e^{\alpha_2 x} e^{\alpha_3\partial_x} e^{\alpha_4\partial_{xx}} \\ &+ e^{\alpha_1} e^{\alpha_2 x}(\dot\alpha_3\partial_x) e^{\alpha_3\partial_x} e^{\alpha_4\partial_{xx}} + e^{\alpha_1} e^{\alpha_2 x} e^{\alpha_3\partial_x}(\dot\alpha_4\partial_{xx}) e^{\alpha_4\partial_{xx}} \ . \end{aligned} \tag{5.30}$$

Nun multiplizieren wir mit dem inversen Operator,

$$\begin{aligned} (\partial_t U)U^{-1} =& \dot\alpha_1 e^{\alpha_1} e^{\alpha_2 x} e^{\alpha_3\partial_x} e^{\alpha_4\partial_{xx}} e^{-\alpha_4\partial_{xx}} e^{-\alpha_3\partial_x} e^{-\alpha_2 x} e^{-\alpha_1} \\ &+ e^{\alpha_1}(\dot\alpha_2 x) e^{\alpha_2 x} e^{\alpha_3\partial_x} e^{\alpha_4\partial_{xx}} e^{-\alpha_4\partial_{xx}} e^{-\alpha_3\partial_x} e^{-\alpha_2 x} e^{-\alpha_1} \\ &+ e^{\alpha_1} e^{\alpha_2 x}(\dot\alpha_3\partial_x) e^{\alpha_3\partial_x} e^{\alpha_4\partial_{xx}} e^{-\alpha_4\partial_{xx}} e^{-\alpha_3\partial_x} e^{-\alpha_2 x} e^{-\alpha_1} \\ &+ e^{\alpha_1} e^{\alpha_2 x} e^{\alpha_3\partial_x}(\dot\alpha_4\partial_{xx}) e^{\alpha_4\partial_{xx}} e^{-\alpha_4\partial_{xx}} e^{-\alpha_3\partial_x} e^{-\alpha_2 x} e^{-\alpha_1} \ . \end{aligned} \tag{5.31}$$

Wir wollen diesen Ausdruck möglichst weit vereinfachen. Dazu müssen wir schauen, welche Terme wir vertauschen können, und wo sich einzelne Exponentialfaktoren wegheben können. Die $\dot\alpha_i$ können wir immer nach vorne ziehen, bei den restlichen Terminen müssen wir aufpassen, ob die Faktoren durch Elemente der Lie-Algebra "getrennt" sind oder nicht. Dies vereinfacht den Ausdruck bereits deutlich zu

$$\begin{aligned} (\partial_t U)U^{-1} =& \dot\alpha_1 + \dot\alpha_2 e^{\alpha_1}(x) e^{-\alpha_1} + \dot\alpha_3 e^{\alpha_1} e^{\alpha_2 x}(\partial_x) e^{-\alpha_2 x} e^{-\alpha_1} \\ &+ \dot\alpha_4 e^{\alpha_1} e^{\alpha_2 x} e^{\alpha_3\partial_x}(\partial_{xx}) e^{-\alpha_3\partial_x} e^{-\alpha_2 x} e^{-\alpha_1} \ . \end{aligned} \tag{5.32}$$

Die restlichen Ausdrücke der Form $e^{\lambda X} Y e^{-\lambda X}$ können wir nach der BCH-Formel (5.15) als Reihenentwicklung über verschachtelte Kommutatoren von X und Y umschreiben. Die ersten

Kommutatoren für $1, x, \partial_x, \partial_{xx}$ hatten wir bereits im Rahmen der Überprüfung unserer Algebra bestimmt. Von den verschachtelten Klammern überlebt nur der Ausdruck

$$[x, [x, \partial_{xx}]] = -2[x, \partial_x] = 2 \ . \tag{5.33}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
e^{\alpha_2 x}(\partial_x)e^{-\alpha_2 x} =& \partial_x + \alpha_2[x, \partial_x] && = \partial_x - \alpha_2 \ , && (5.34)\\
e^{\alpha_3 \partial_x}(\partial_{xx})e^{-\alpha_3 \partial_x} & && = \partial_{xx} \ , && (5.35)\\
e^{\alpha_2 x}(\partial_{xx})e^{-\alpha_2 x} =& \partial_{xx} + \alpha_2[x, \partial_{xx}] + \frac{\alpha_2^2}{2}[x, [x, \partial_{xx}]] && = \partial_{xx} - 2\alpha_2\partial_x + \alpha_2^2 \ . && (5.36)
\end{aligned}$$

Dies führt uns (mit wieder explizit geschriebenem Parameter t) zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(t)}{\partial t}U^{-1}(t) =& [\dot\alpha_1(t) - \dot\alpha_3(t)\alpha_2(t) + \dot\alpha_4(t)\alpha_2(t)^2] + \dot\alpha_2(t)x \\
&+ [\dot\alpha_3(t) - 2\dot\alpha_4(t)\alpha_2(t)]\frac{\partial}{\partial x} + \dot\alpha_4(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ ,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

oder ausgedrückt als Satz an Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot\alpha_1(t) = \dot\alpha_3(t)\alpha_2(t) - \dot\alpha_4(t)\alpha_2(t)^2 \ , \qquad & \dot\alpha_2(t) = \frac{i}{\hbar}f(t) \ , \\
\dot\alpha_3(t) = 2\dot\alpha_4(t)\alpha_2(t) \ , \qquad & \dot\alpha_4(t) = \frac{i\hbar}{2m} \ .
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Diese können wir lösen, indem wir für

$$\alpha_4(t) = \frac{i\hbar t}{2m} \tag{5.39}$$

direkt integrieren. Ebenso sehen wir

$$\alpha_2(t) = \frac{i}{\hbar}\int_0^t f(t')\,\mathrm{d}t' =: \frac{i}{\hbar}\overline{p}(t) \ , \tag{5.40}$$

wobei wir die Kurzschreibweise $\overline{p}$ in Anlehnung an die Literatur einführen (dazu kommen wir am Ende). Damit erhalten wir

$$\alpha_3(t) = -\frac{1}{m}\int_0^t \left(\int_0^{t'} f(t'')\,\mathrm{d}t''\right)\mathrm{d}t' =: -\overline{x}(t) \tag{5.41}$$

und schließlich

$$\alpha_1(t) = -\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\int_0^t \left(\int_0^{t'} f(t'')\,\mathrm{d}t''\right)^2 \mathrm{d}t' =: -\frac{i}{\hbar}\beta(t) \ . \tag{5.42}$$

Unser Zeitentwicklungsoperator lautet demnach

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\beta(t)}e^{\frac{i}{\hbar}\overline{p}(t)x}e^{-\overline{x}(t)\frac{\partial}{\partial x}}e^{-\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)t} = e^{i\theta(x,t)}e^{-\overline{x}\frac{\partial}{\partial x}}e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \ . \tag{5.43}$$

Dabei haben wir $\theta(x,t) = \frac{1}{\hbar}(\overline{p}(t)x - \beta(x))$ eingeführt.

Dieses Resultät können wir schließlich für die zeitliche Entwicklung einer Wellenfunktion nutzen. Nehmen wir eine initiale Wellenfunktion $\psi(x,0)$ für ein freies Teilchen ohne treibende Kraft für $t = 0$ an. Wir wenden das berechnete $U(t)$ an und erhalten

$$\psi(x,t) = e^{i\theta(x,t)}\psi(x - \overline{x}, t) \ . \tag{5.44}$$

Dies ist in Übereinstimmung mit anderen Ansätzen für eine treibene Kraft $f(t)$. An dieser Stelle ein paar Worte zu unserer Notation: für eine solche Kraft sieht man vornehmlich zwei Effekte auf das quantenmechanische System, eine Verschiebung $\overline{x}(t)$ in der Koordinate sowie eine zeitabhängige Phasenverschiebung $\theta(x,t)$ der Wellenfunktion. Die räumliche Verschiedung $\overline{x}(t)$ entspricht nach dem Ehrenfest-Theorem der Differenz der Erwartungswerte für die Position zwischen getriebenem und ungetriebenem System. Ebenso kommt es zu einer Verschiebung im Impuls, welche wir als $\overline{p}(t) = \hbar\partial_x\theta(x,t)$ schreiben können. Daraus erhalten wir die bereits oben benutzte Form

$$\theta(x,t) = \frac{1}{\hbar}(\overline{p}(t)x - \beta(t)) \ , \tag{5.45}$$

wobei $\beta(t)$ der Wirkung des ungetriebenen Systems entspricht.

Die gefundenen $\alpha_i(t)$ können u.a. auch dazu benutzt werden, um das Verhalten unseres Oszillators im Phasenraum zu betrachten. Dies wird z.B. ausführlichst für mehrere Fälle in der Arbeit von R.T. Sayer, auf welcher dieser Abschnitt basiert, betrachtet.