Kapitel 7: Darstellungstheorie

Wir wollen nach unserem Ausflug in die Lie-Theorie weitere Gruppentheorie betreiben. Die Darstellungstheorie begegnet dem Physiker im Bachelor im Rahmen der Kern- & Elementarteilchen-Physik das erste Mal explizit. Wir folgen vornehmlich den Werken von:

- A. Zee: „Group Theory in a Nutshell for Physicists"
- S. Scherer: „Symmetrien und Gruppen in der Teilchenphysik"

7.1 Grundlegendes

Grundlegende Idee der Darstellungstheorie: stelle Gruppenelem. $g \in G$ durch Matrizen $D(g)$ dar.

↳ für Physiker: siehe z.B. Drehungen im Raum

Darstellungen sind aber nicht eindeutig ⤳ suche „besonders gute" Darstellungen

Def.: Eine <u>Darstellung</u> D einer Gruppe G (auf VR V) ist ein Homomorphismus $D: G \to GL(V)$, $g \mapsto D(g): V \to V$

mit $D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$.

Um Darstellungen zu unterscheiden, führen wir das Superskript $D^{(r)}(g)$ ein. Den VR V bezeichnen wir als <u>Trägerraum</u> der Darstellung. Seine Dimension bezeichnen wir als <u>Dimension der Darstellung</u>.

Def.: Zwei Darstellungen $D^{(1)}, D^{(2)}$ einer Gruppe G heißen <u>äquivalent</u>, wenn es einen bijektiven Operator $S: V_1 \to V_2$ gibt, sodass

$$S D^{(1)}(g) S^{-1} = D^{(2)}(g) \qquad \forall g \in G.$$

Sind die zugehörigen VR V_1, V_2 gleich, so ist S eine Art Basis-wechsel.

<u>Def.:</u> Sei V ein VR und D eine Darstellung der Gruppe G auf ebendiesem. Wir bezeichnen einen Unter-VR als <u>invariant bzgl. D</u>, wenn

$D(g)u \in U$ für alle $u \in U$ und für alle $g \in G$ gilt.

Weiter nennen wir die Darstellung D auf V <u>reduzibel</u>, wenn ein invarianter U-VR U bzgl. D existiert, wobei $U \neq \{0\}$ und $U \neq \{V\}$.

Andernfalls nennen wir sie irreduzibel.

<u>Bsp.:</u> (1) Jeder VR wird zu einer Darstellung von G, wenn wir $D(g) = 1_V \ \forall g \in G$ wählen („Einsdarstellung").

(2) Die Elemente der $SO(3)$ aufgefasst als lineare Operatoren auf $\mathbb{R}^3$, bilden eine <u>treue</u> Darstellung (d.h. D ist injektiv) der $SO(3)$.

(3) Elemente der $SO(3)$ wie in (2) bilden eine <u>nicht</u>-treue Darstellung der $SU(2)$. Die Darstellung ist nicht injektiv, da eine $(2 \to 1)$-Abb.

$$\varphi: SU(2) \to SO(3), \quad U \mapsto \varphi(U)$$

$$\text{mit } \varphi_{ij}(U) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\sigma_i U \sigma_j U^+), \qquad i,j \in \{1,2,3\}$$

Pauli-Matrizen

existiert, sodass $\pm U \in SU(2)$ dasselbe Bild $\varphi(U) \in SO(3)$ besitzen.

(4) Die Gruppe $\mathbb{Z}_n$ hat eine eindimensionale Darstellung, bei der $e^{i2\pi j/N}$, $j = 0, \ldots, N-1$ durch sich selbst dargestellt werden.

Wir können aber auch $e^{i2\pi kj/N}$ für die Darstellung des selben Elements nehmen ($k \in \mathbb{N}$). $\rightsquigarrow$ N verschiedene Darstellungen von $\mathbb{Z}_N$.

(5) Für $\mathbb{Z}_3$ ist $\{1, \omega, \omega^2\}$ mit $\omega := e^{2\pi i/3}$ eine 1D-Darstellung, aber auch $\{1, \omega^2, \omega\}$ (hier ist $V = \mathbb{C}$). Wählen wir $V = \mathbb{C}^3$, so liefert uns

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(g_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine höherdim. Darstellung.

7.2 Charaktere

Def.: Sei $D^{(r)}(g)$ eine Darstellung. Der Charakter dieser Darstellung ist definiert als $\chi^{(r)}(g) := \operatorname{tr} D^{(r)}(g)$.

Satz: Seien $g_1, g_2 \in G$ äquivalent, d.h. $\exists f \in G$ mit $g_1 = f^{-1} g_2 f$. Dann gilt $\chi^{(r)}(g_1) = \chi^{(r)}(g_2)$. Anders gesagt: alle Elemente einer Äquivalenzklasse haben denselben Charakter

("Character is a function of class" – A. Zee).

Bew.:
$$\begin{aligned} \chi^{(r)}(g_1) &= \operatorname{tr} D^{(r)}(f^{-1} g_2 f) \\ &= \operatorname{tr}\left[D^{(r)}(f^{-1})\, D^{(r)}(g_2)\, D^{(r)}(f)\right] \\ &= \operatorname{tr}\left[D^{(r)}(g_2)\, D^{(r)}(f)\, D^{(r)}(f^{-1})\right] \\ &= \operatorname{tr}\left[D^{(r)}(g_2)\right] = \chi^{(r)}(g_2). \end{aligned}$$

$\square$.

Lemma von Schur: Sei $D(g)$ eine irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe G. Gibt es eine Matrix A mit $AD(g) = D(g)A \quad \forall g \in G$, dann ist $A = \lambda I$ für eine Konstante λ.

Anschaulich: Wir können keine Matrix $A \neq I$ finden, die mit einem Satz Darstellungsmatrizen für eine irreduzible Gruppe kommutieren.

Bew.: Wir wollen zeigen "$HD(g) = D(g)H \ \forall g \Rightarrow H = \lambda I$".

O.B.d.A sei H hermitesch (zeigen wir hier nicht).

Damit ist H diagonalisierbar, $H = W^\dagger H' W$.

Wir transformieren $D(g) = W^\dagger D'(g) W$ auf die entsprechende Basis und erhalten $(W^\dagger H' W)(W^\dagger D'(g) W) = (W^\dagger D'(g) W)(W^\dagger H' W)$.

$\Leftrightarrow \quad H' D'(g) = D'(g) H'$ (lasse Striche ab jetzt weg)

Einschub: Notation nach Zee

Schreibe für $\phi \in \mathbb{C}^n$: ϕ^i. Weiter sei $\phi_i := (\phi^i)^*$.

Also Skalarprodukt zwei komplexwertiger Vektoren $\phi_i \psi^i := \sum_i \phi_i \psi^i$.

Summiere immer nur oberen mit unteren Index.

Also für Matrix-Vektor-Mult.: $(M\psi)^i = M^i_j \psi^j$.

(oben: Zeile, unten: Spalte)

Betrachte Komponente ij:

$$(HD(g))^i_j = H^i_i D^i_j(g) = (D(g)H)^i_j = D^i_j(g) H^j_j.$$

$$\Rightarrow \quad (H^i_i - H^j_j) D^i_j(g) = 0.$$

Es muss $H_i^{\ i} = H_j^{\ j}$ gelten, außer es wäre $D^{i}_{\ j}(g) = 0 \ \forall g \in G$.

H ist diagonal und alle Diag.elem. haben den gleichen Wert.

Also ist $H = \lambda I$. $\square$.

<u>Satz (Fundamentale Orthogonalitätsrelation):</u> Sei $D(g)$ eine d-dimensionale, irreduzible Darstellung eines endlichen Gruppe G. Dann ist:

$$\sum_{g \in G} D^\dagger(g)^i_{\ j} D(g)^k_{\ l} = \frac{|G|}{d} \delta^i_{\ l} \delta^k_{\ j} .$$

Bew.: Sei $A := \sum_g D^\dagger(g) X D(g)$ für ein bel. X. Dann ist

$$D^\dagger(g) A D(g) = D^\dagger(g) \Big[\sum_{g'} D^\dagger(g') X D(g') \Big] D(g)$$

$$= \sum_{g'} D^\dagger(g'g) X D(g'g) = A .$$

$$\overset{\text{Schur}}{\Longrightarrow} A = \lambda I_d \Rightarrow \operatorname{tr} A = \lambda d = \sum_g \operatorname{tr} D^\dagger(g) X D(g) = \sum_g \operatorname{tr} X = |G| \cdot \operatorname{tr} X .$$

Also $\lambda = \frac{|G|}{d} \operatorname{tr} X$.

Betrachte nun X mit Eintrag $X^j_{\ k} = 1$ und 0 sonst. $\Rightarrow \operatorname{tr} X = \delta^k_{\ j}$.

$$A^i_{\ l} = \sum_g (D^\dagger(g) X D(g))^i_{\ l} = \sum_g D^\dagger(g)^i_{\ j} D(g)^k_{\ l} = \lambda \delta^i_{\ l} = \frac{|G|}{d} \delta^i_{\ l} \operatorname{tr} X$$

$$= \frac{|G|}{d} \delta^i_{\ l} \delta^k_{\ j} .$$

$\square$.

Für zwei nicht-äquivalente Darstellungen r, s gilt

$$\sum_{g \in G} D^{(r)\dagger}(g)^i_{\ j} D^{(s)}(g)^k_{\ l} = \frac{|G|}{d_r} \delta^{rs} \delta^i_{\ l} \delta^k_{\ j} . \qquad (*)$$

(*) können wir auch in eine Aussage zu Charakteren umformen.

Setze $i=j,\ k=l$:

$$\sum_g (\chi^{(r)}(g))^* \chi^{(s)}(g) = \sum_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Anzahl von Elem. in } c}}{n_c} (\chi^{(r)}(c))^* \chi^{(s)}(c) = |G|\, \delta^{rs} \quad (**)$$

Für endliche Gruppen können wir in Form sog. <u>Charaktertafeln</u> Informationen über die Darstellungen erhalten.

Bsp.: Gruppe A_4, $\omega := e^{i2\pi/3}$

$|A_4| = 4!/2 = 12$ Elemente

4 Äquivalenzklassen: $\{I\}$, $\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $\{(123), (142), (134), (243)\}$, $\{(132), (124), (143), (234)\}$

1-dim. (1, 1', 1''), 3-dim. (3)

A_4	n_c	c	1	$1'$	$1''$	3
	1	I	1	1	1	3
$\mathbb{Z}_2$	3	$(12)(34)$	1	1	1	-1
$\mathbb{Z}_3$	4	(123)	1	ω	ω^*	0
$\mathbb{Z}_3$	4	(132)	1	ω^*	ω	0

← vier versch. irred. Darstellungen

$\chi^{(r)}(I) = d_r$

von Klasse erzeugte UG; Anzahl Elem. in c; Repräsentant der Äquiv.klasse; trivial

Die Anzahl irreduzibler Darstellungen ist durch die Anzahl von Klassen beschränkt (zeigen wir hier nicht).

Für eine gegebene Darstellung wollen wir natürlich wissen, ob diese irreduzibel ist.

$$D(g) = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & D^{(r)}(g) & & 0 \\ & & D^{(s)}(g) & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Eine Darstellung r mit Dimension d_r kann n_r-mal auftreten.

Die Charaktere sind als $\chi(c) = \sum_r n_r \chi^{(r)}(c)$ gegeben.

Nach (**) ist

$$\sum_c n_c \chi^*(c)\chi(c) = \sum_c n_c \sum_{r,s} n_r n_s \chi^{*(r)}(c)\chi^{(s)}(c)$$
$$= |G| \sum_{r,s} n_r n_s \delta^{rs} = |G| \sum_r (n_r)^2 .$$

→ Ist $\sum_r (n_r)^2 = 1$, dann ist genau ein $n_r = 1$, alle anderen null.

Dann enthält $D(g)$ die irred. Darstellung einmal ⇒ $D(g)$ ist irreduzibel.

→ Ist $\sum_r (n_r)^2 > 1$, dann ist $D(g)$ reduzibel.

Bsp.: Wir betrachten die Gruppe $A_3 = \{I, (123), (132)\}$.

Es gibt drei einelementige Äquivalenzklassen (da A_3 abelsch ist).

Dann kann $\sum_r d_r^2 = |G|$ nur durch 3 eindim., irred. Darstellungen erfüllt werden (bezeichnet als $1, 1', 1''$).

Es ist $(123)^3 = I$ und die Darstellungs„matrix" ist eine Zahl, also ist (123) darstellbar durch 1, $\omega := e^{i2\pi/3}$ oder $\omega^* = \omega^2$. Als Charaktertafel:

A_3	n_c	c	1	$1'$	$1''$
	1	I	1	1	1
$\mathbb{Z}_3$	1	(123)	1	ω	ω^*
$\mathbb{Z}_3$	1	(132)	1	ω^*	ω

Wir machen nun einen Sprung in die Physik (und machen hier später weiter).

7.3 Gruppentheorie in der Quantenmechanik

Betrachte $H\psi^\alpha = E^\alpha \psi^\alpha$. Im Allg. sind die EW E^α, E^β für $\alpha \neq \beta$ verschieden. Bei Entartung kann jedoch für einige ψ^a, $a = 1, \dots, d$ dieselbe EW E auftreten.

Gegeben sei eine Menge an Trafos (beschrieben durch unitäre Op. T), welche $T^\dagger H T = H$ erfüllen. $\rightsquigarrow$ Trafos bilden Symmetriegruppe.

Sei $H\psi^a = E\psi^a$. Dann ist $H(T\psi^a) = TH\psi^a = TE\psi^a$.

$\psi'^a = T\psi^a$ ist Eigenzustand von H $\Rightarrow$ Linearkombination $\psi^a = \psi'^a = (D(T))^{ab}\psi^b$.

Betrachte VR, der durch d entartete Eigenzustände aufgespannt wird.

In diesem Raum ist H eine $d \times d$-Einheitsmatrix (multipliziert mit E).

Der Entartungsgrad entspricht in der QM der Dimension der irreduziblen Darstellung.

Dies haben wir auch in Schurs Lemma gesehen: Die Matrix H, die mit allen $d \times d$-Matrizen $D(g)$ der irred. Darstellung von G kommutiert, entspricht hier dem Hamiltonian.

$\rightsquigarrow$ Im d-dim. UR ist der Hamiltonian $H = \lambda I$, was genau der Tatsache entspricht, dass d Energieniveaus entartet sind.

Für den Fall, dass Zustände eine reduzible Darstellung der Symmetriegr. bilden, sind die zugehörigen Matrizen (in einer bestimmten Basis) block-diagonal:

$$D(g) = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & D^{(r)}(g) & & \\ & & D^{(s)}(g) & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dann hat der Hamiltonian die Form $H = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & E^{(r)} I & & \\ & & E^{(s)} I & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}.$

$\Rightarrow$ aus der GT erhalten wir die Anzahl $d^{(r)}, d^{(s)}$ entarteter Zustände (Dim. der Blöcke).