

Kapitel 9: Clebsch-Gordan-Zerlegung

Im Abschnitt zur Darstellungstheorie haben wir Grundlagen dafür geschaffen, gruppentheoretisch mit physikalischen Objekten umzugehen. Wir wollen die Anschauung nun erweitern und uns mit Vielteilchensystemen auseinandersetzen.

9.1 Wiederholung / Vorbereitung

Def.: Ein Vektorraum V heißt direkte Summe von n -VR $V_1, \dots, V_n$, geschrieben $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, wenn gilt:

- 1) $V = V_1 + \dots + V_n := \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in V_i, \dots, v_n \in V_n\}$
- 2) vom Nullvektor versch. $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$ sind linear unabhängig.

Jedes $v \in V$ ist eindeutig darstellbar als Linearkomb. der $v_i \in V_i$.

Bsp.: $V = V_1 \oplus V_2$ und $\mathcal{D}^{(1)}, \mathcal{D}^{(2)}$ Darstellungen von G auf V_1 bzw. V_2 .

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(2)} = \{\mathcal{D}(g) = \mathcal{D}^{(1)}(g) \oplus \mathcal{D}^{(2)}(g) \mid g \in G\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \mathcal{D}(g_1) \mathcal{D}(g_2) x &= \mathcal{D}(g_1) (\mathcal{D}^{(1)}(g_2) x_1 + \mathcal{D}^{(2)}(g_2) x_2) \\ &= \mathcal{D}^{(1)}(g_1) \mathcal{D}^{(1)}(g_2) x_1 + \mathcal{D}^{(2)}(g_1) \mathcal{D}^{(2)}(g_2) x_2 \\ &= \mathcal{D}^{(1)}(g_1 g_2) x_1 + \mathcal{D}^{(2)}(g_1 g_2) x_2 = \mathcal{D}(g_1 g_2) x. \end{aligned}$$

Die direkte Summe können wir als Blockdiagonalmatrix schreiben:

$$\mathcal{D}(g) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}^{(2)}(g) \end{pmatrix}.$$

Die Blöcke haben jeweils die Dimension der zugehörigen Vektorräume.

Satz: $\mathcal{D} = \{U(g)\}$ sei eine unitäre Darstellung von G auf endlichdim.

Hilbertraum V ausgestattet mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$:

$$\langle x | U(g)y \rangle = \langle U^\dagger(g)x | y \rangle = \langle U^{-1}(g)x | y \rangle \quad \forall g \in G, x, y \in V.$$

Dann gilt:

1) $\mathcal{D} = \bigoplus_\mu \mathcal{D}^{(\mu)}$ ist die direkte Summe irreduzibler Darstellungen.

2) $V = \bigoplus_\mu V_\mu$ lässt sich als orthogonale Summe mit

$$\langle x_\mu | x_\nu \rangle = 0 \quad \text{für } x_\mu \in V_\mu, x_\nu \in V_\nu, \mu \neq \nu \text{ darstellen.}$$

Bew.: Lassen wir hier aus.

Aufgrund obigen Satzes können wir z.B. die Darstellung

$$\mathcal{D}: SO(3) \rightarrow GL(H), \quad \mathcal{D}(R(\alpha, \beta, \gamma)) = \exp(-i\alpha L_z) \exp(-i\beta L_y) \exp(-i\gamma L_x)$$

in eine direkte Summe irred. Darstellungen zerlegen ($H = L^2(\mathbb{R}^3)$).

Def.: V_1, V_2 $\mathbb{K}$ -VR. Der Tensorproduktraum $V_1 \otimes V_2$ ist die Menge

aller endlichen Linearkombinationen $\alpha_1 x_1 \otimes y_1 + \dots + \alpha_n x_n \otimes y_n$

mit $x_i \in V_1, y_i \in V_2, \alpha_i \in \mathbb{K}$. Es gilt:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \otimes y = \alpha_1 x_1 \otimes y + \alpha_2 x_2 \otimes y,$$

$$x \otimes (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x \otimes y_1 + \alpha_2 x \otimes y_2.$$

Für V_1, V_2 mit Basen $\{e_i\}$ bzw. $\{f_j\}$ hat $V_1 \otimes V_2$ eine $(m \times n)$ -dim.

Basis, sodass $V_1 \otimes V_2 \ni x = \sum_i \sum_j a_{ij} e_i \otimes f_j, a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Für zwei lin. Op. L_1, L_2 auf V_1 bzw. V_2 ist $L = L_1 \otimes L_2$

gegeben als $Lx = \sum_i \sum_j a_{ij} L_1 e_i \otimes L_2 f_j$.

Das Produkt zweier Op. ist $LM = L_1 M_1 \otimes L_2 M_2$.

Def.: Seien $D^{(1)}, D^{(2)}$ Darstellungen von G_1 und G_2 auf V_1 bzw. V_2 ,

$$D^{(1)}(g_1) e_i = \sum_{i'=1}^m D_{i',i}^{(1)}(g_1) e_{i'}, \quad \forall g_1 \in G_1,$$

$$D^{(2)}(g_2) f_j = \sum_{j'=1}^n D_{j',j}^{(2)}(g_2) f_{j'}, \quad \forall g_2 \in G_2.$$

Dann definiert $D(g_1, g_2) = D^{(1)}(g_1) \otimes D^{(2)}(g_2)$ mit

$D_{ij; i'j'}(g_1, g_2) = D_{i,i'}^{(1)}(g_1) D_{j,j'}^{(2)}(g_2)$ eine Darstellung von $G_1 \times G_2$ auf $V_1 \otimes V_2$, das direkte Produkt der Darstellungen $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$.

Satz: Sei $D = D^{(1)} \otimes D^{(2)}$ wie oben. $D^{(1)}, D^{(2)}$ sind irred. Darstellungen von G_1, G_2 auf V_1 bzw. V_2 genau dann, wenn D irred. Darstellung von $G_1 \times G_2$ auf $V_1 \otimes V_2$ ist.

Bew.: Lassen wir aus (technisch).

Def.: (a) Äußere Tensorproduktdarstellung: $G_1 = G_2 = G$. $D^{(1)}, D^{(2)}$

Darstellungen von G auf V_1 bzw. V_2 .

$$D = D^{(1)} \otimes D^{(2)}, \quad D(g_1, g_2) := D^{(1)}(g_1) \otimes D^{(2)}(g_2), \quad \begin{matrix} g_1, g_2 \in G \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{können versch. sein} \end{matrix}$$

(b) Innere Tensorproduktdarstellung: $D'(g) := D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g), g \in G$.

Wir wollen uns später die Kopplung zweier Zustände anschauen, z.B.

zweier Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, wir können u.a. eine Darstellung der Gruppe $SU(2)$ mit VR $V_{\frac{1}{2}} = \mathbb{C}^2$ zur Beschreibung verwenden.

Der Raum $V_{\frac{1}{2}} \otimes V_{\frac{1}{2}}$ für D' lässt sich in $V_1 \oplus V_0$ zerlegen.

Die UR V_1 (3D) & V_0 (1D) sind Träger irred. Darstellungen mit Gesamtspin 1 bzw. 0.

9.2 Clebsch-Gordan-Zerlegung

Satz: Für das innere Tensorprodukt $\mathcal{D}(j_1 \times j_2) = \mathcal{D}(j_1) \otimes \mathcal{D}(j_2)$

der irred. Dar. $\mathcal{D}(j_1), \mathcal{D}(j_2)$ von $SO(3)$ oder $SU(2)$ gilt die Zerlegung:

$$\mathcal{D}(j_1) \otimes \mathcal{D}(j_2) = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{D}(j)$$

Bew.: Lassen wir hier aus (nutzt zahlreiche Aspekte zu Lie-Algebren & Charakteren). $\leadsto$ Für Interessierte: Buch von Stefan Scherer.

Einen Vektor des Produktraums können wir schreiben als:

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} a_{m_1 m_2} \underbrace{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle}_{\substack{=: |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \\ \text{"ungekoppelte Basis"}}} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j b_{jm} \underbrace{|(j_1, j_2) j, m\rangle}_{\text{"gekoppelte Basis"}}.$$

Die Anzahl orth. Basisvektoren ist $M = (2j_1+1)(2j_2+1)$ mit Relationen

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_1, m_1'; j_2, m_2' \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'},$$

$$\langle (j_1, j_2) j, m | (j_1, j_2) j', m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}.$$

Wie wird nun ein Wechsel zwischen gekoppelter & ungekoppelter Basis beschrieben?

$\hookrightarrow$ entwickle gekoppelte Basisvektoren nach ungekoppelten

$$\begin{aligned} |(j_1, j_2) j, m\rangle &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} C_{m_1 m_2; j m} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \\ &= \sum_{m_1, m_2} \underbrace{\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix}}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeffizienten}} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \quad (*) \end{aligned}$$

Wir nutzen die obigen Orthogonalitätsrelationen:

$$\begin{aligned} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | (j_1, j_2) j, m \rangle &= \sum_{m_1', m_2'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & m \end{pmatrix} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_1, m_1'; j_2, m_2' \rangle \\ &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix}. \quad (*) \end{aligned}$$

Mit geeigneten Konventionen sind die CG-Koeffizienten reellwertig, d.h.

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | (j_1, j_2) j, m \rangle = \langle (j_1, j_2) j, m | j_1, m_1; j_2, m_2 \rangle.$$

Wir führen nun die $M \times M$ -Matrix C ein, um den Basiswechsel zu vermitteln.

Der Eintrag $C_{m_1 m_2; j m}$ (Zeile $m_1 m_2$, Spalte $j m$) korrespondiere zum CG-Koeff. $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix}$. Die Matrix C ist somit reell und es ist $C^T C = \mathbb{1}$,

$$\delta_{j'j} \delta_{m'm} = \delta_{j'm'; j m} = (C^T C)_{j'm'; j m} = \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix},$$

$$\delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} = \delta_{m_1 m_2; m_1' m_2'} = (C C^T)_{m_1 m_2; m_1' m_2'} = \sum_{j, m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & m \end{pmatrix}.$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = \sum_{j, m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} |(j_1, j_2) j, m\rangle$$

9.3 Algorithmus für CG-Koeffizienten

Wir wollen nun alle $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix}$ für geg. j_1, j_2 berechnen, wobei $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$.

Führe Kurzschreibweise ein:

$$|m_1; m_2\rangle := |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \quad \& \quad |j, m\rangle := |(j_1, j_2) j, m\rangle.$$

Wir hängen uns mit dem Absteigeoperator von Eigenwertproblem zu Eigenwertproblem. Da EW zu $J_3 = J_3(1) + J_3(2)$ additiv ist, Verschwinden CGK automatisch für $m \neq m_1 + m_2$.

Zur Erinnerung: $J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$
 $= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle$

(1) Beginne mit $j = j_1 + j_2$ (maximales j).

(i) Der Zustand mit maximalem j und maximalem $m = j$ hat

$$|j, j\rangle = |j_1; j_2\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 + j_2 \\ j_1 + j_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Dies folgt aus der zuvor getroffenen Konvention, aus der auch $CGK \in \mathbb{R}$ folgte.

(ii) Wende $J_- = J_-(1) + J_-(2)$ an:

$$\sqrt{2j} |j, j-1\rangle = J_- |j, j\rangle = J_-(1) |j_1; j_2\rangle + J_-(2) |j_1; j_2\rangle$$

$$= \sqrt{2j_1} |j_1-1; j_2\rangle + \sqrt{2j_2} |j_1; j_2-1\rangle$$

Nutze (*) & Orthogonalität für beide CGK:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1-1 & j_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 + j_2 \\ j_1 + j_2 - 1 \end{pmatrix} = \langle j_1-1; j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 \rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}},$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1 & j_2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 + j_2 \\ j_1 + j_2 - 1 \end{pmatrix} = \langle j_1; j_2-1 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 \rangle = \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}.$$

(iii) Wende $J_- 2(j_1 + j_2)$ an und berechne alle $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 + j_2 \\ m \end{pmatrix}$ für $m < j_1 + j_2$.

(2) Betrachte $j = j_1 + j_2 - 1$.

Starte mit m maximal. Schreibe

$$|j, j\rangle = \alpha |j_1, j_2 - 1\rangle + \beta |j_1 - 1, j_2\rangle, \quad \alpha, \beta \text{ CGK.}$$

$|j, j\rangle$ ist auf eins normiert, also $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Verwende J_+ :

$$\begin{aligned} 0 &= J_+ |j, j\rangle \\ &= \alpha \sqrt{2j_2} |j_1, j_2\rangle + \beta \sqrt{2j_1} |j_1, j_2\rangle \\ &= \sqrt{2} (\alpha \sqrt{j_2} + \beta \sqrt{j_1}) |j_1, j_2\rangle \end{aligned}$$

$$|j_1, j_2\rangle \neq 0, \text{ d.h. } \sqrt{2} (\alpha \sqrt{j_2} + \beta \sqrt{j_1}) = 0 \Leftrightarrow \beta = -\sqrt{j_2/j_1} \alpha.$$

Nach der Normierungsbed. ist $\alpha^2 (1 + j_2/j_1) = 1$ und weiter ist

$$\alpha = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_2 & j_2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 + j_2 - 1 \\ j_1 + j_2 - 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}, \quad \beta = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1 - 1 & j_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 + j_2 - 1 \\ j_1 + j_2 - 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}.$$

Mehrfaches Anwenden von J_- erzeugt schließlich alle

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 + j_2 - 1 \\ m \end{pmatrix} \text{ mit } m < j_1 + j_2 - 1.$$

(3) Wiederhole Vorgehen bis $j = |j_1 - j_2|$.

9.3 Beispiel zu Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Wir betrachten exemplarisch die CG-Zerlegung $\mathcal{D}^{(\frac{1}{2})} \otimes \mathcal{D}^{(\frac{1}{2})} = \mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(1)}$

der $SU(2)$. In der Kernphysik haben wir dieses Beispiel in der Schreibweise

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0 \quad (\text{bzw. in Multiplizitäten } 2 \otimes 2 = 3 \oplus 1) \text{ im}$$

Zusammenhang mit Spin- bzw. Drehimpulskopplung kennengelernt.

- Beginne mit $j=1$. Es gilt erneut nach Konvention

$$|1, 1\rangle = \left| \overset{j}{\frac{1}{2}}; \overset{m}{\frac{1}{2}} \right\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

- Wende J_- an:

$$\begin{aligned} J_- |1, 1\rangle &= \sqrt{2} |1, 0\rangle = J_-(1) \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle + J_-(2) \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \left| -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Und nochmal mit J_- :

$$\begin{aligned} J_- |1, 0\rangle &= \sqrt{2} |1, -1\rangle \\ &= (J_-(1) + J_-(2)) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underbrace{J_-(1) \left| -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle}_{=0} + \underbrace{J_-(1) \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle}_{= \left| -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{J_-(2) \left| -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle}_{= \left| -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle} + \underbrace{J_-(2) \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle}_{=0} \right) \\ &= \sqrt{2} \left| -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |1, -1\rangle = \left| -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.$$

- Nun für $j=0$: $|0, 0\rangle = \alpha \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle + \beta \left| -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1/2}{1/2+1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = -\sqrt{\frac{1/2}{1/2+1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Basiszustände der Trägerräume V_1, V_0 sind somit

(i) $j = 1$ (Triplett):

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right),$$

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

(ii) $j = 0$ (Singlett):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right)$$

Wir sehen u.a., dass im Triplett nur symm. Wellenfkt'n auftauchen, im Singlett nur antisymm. Dieses Verhalten sehen wir in der Kernphysik noch deutlicher bei der Zusammensetzung von Pionen und anderen Mesonen.