# Kapitel 10

# Physikalische Ausblicke

Nach unseren einführenden Einblicken in die analytischen und algebraischen Methoden, welche wir im Zusammenhang mit der Quantenmechanik verwenden, wollen wir uns in dieser letzten Vorlesungseinheit einen Eindruck davon verschaffen, welche weiterführenden Themen es in den behandelten Gebieten gibt.

## 10.1 Operatoren: Nicht-hermitesche Quantenmechanik

Bislang haben wir für unsere quantenmechanischen Betrachtungen immer axiomatisch verlangt, dass wir mit hermiteschen Objekten arbeiten. Dies hat es uns erlaubt, im Falle eines hermiteschen Hamiltonians ein reelles Energiespektrum zu erhalten. Weiterhin ist die Zeitentwicklung unitär, d.h. Wahrscheinlichkeiten bleiben erhalten.
Allerdings können wir diese Beschränkung der Hermitizität auch wegnehmen und trotzdem – unter bestimmten Bedingungen – interessante Physik erhalten. Im Folgenden befassen wir uns mit der sog. $\mathcal{PT}$-symmetrischen Physik, d.h. Problemen, welche unter Raum-Zeit-Spiegelungen symmetrisch sind. Dabei orientieren wir uns vornehmlich am Review-Paper von C. M. Bender [*Rep. Prog. Phys.* **70**, 947-1018 (2007)].
Den Paritätsoperator schreiben wir als $\mathcal{P}$. Er erfüllt

$$\mathcal{P} \colon x \to -x \ , \quad p \to -p \ . \tag{10.1}$$

d.h. er führt eine Spiegelung im Raum durch ("Hütchen" über Orts- und Impulsoperator schreiben wir im Folgenden nicht). Der Zeitumkehroperator $\mathcal{T}$ erfüllt

$$\mathcal{T} \colon x \to x \ , \quad p \to -p \ . \tag{10.2}$$

Beide Operatoren lassen $[x, p] = i\hbar$ invariant, was allerdings bedeutet, dass $\mathcal{T}$ antilinear sein muss: $\mathcal{T} \colon i \to -i$.

**Definition 10.1.1.** Wir schreiben $H^{\mathcal{PT}} := (\mathcal{PT})H(\mathcal{PT})$. Ein Hamiltonian $H$ ist $\mathcal{PT}$-symmetrisch, wenn

$$H(\mathcal{PT}) - (\mathcal{PT})H = 0 \ . \tag{10.3}$$

**Beispiel 10.1.2.** Die Hamiltonians $H = p^2 + ix^3$ und $H = p^2 - x^4$ sind $\mathcal{PT}$-symmetrisch. Die Hamiltonians sind nicht-hermitesch, aber haben dennoch reelle Eigenwerte und unitäre Zeitentwicklung.

**Beispiel 10.1.3.** Allgemeiner sind Hamiltonians der Form

$$H = p^2 + x^2(ix)^\epsilon \tag{10.4}$$

mit $\epsilon \in \mathbb{R}$ $\mathcal{PT}$-symmetrisch. Es lässt sich zeigen, dass für $\epsilon \geqslant 0$ die Eigenwerte reell und positiv sind; für $\epsilon < 0$ gibt es komplexwertige Eigenwerte. Der erste Fall definiert die Region der *ungebrochenen*, der zweite den der *gebrochenen $\mathcal{PT}$-Symmetrie.*

**Beispiel 10.1.4.** Für einen $\mathcal{PT}$-symmetrischen Hamiltonian kommutiert $H$ mit $\mathcal{PT}$. Allerdings ist $\mathcal{PT}$nicht-linear, d.h. Eigenzustände von $H$ müssen nicht zwangsläufig Eigenzustände von $\mathcal{PT}$ sein. Nehmen wir zunächst an, dass die für einen Eigenzustand $\psi$ von $H$ doch der Fall sei, sprich $\mathcal{PT}\psi = \lambda\psi$. Dies schreiben wir um zu

$$(\mathcal{PT})(\mathcal{PT})\psi = \psi = (\mathcal{PT})\lambda\psi = (\mathcal{PT})\lambda(\mathcal{PT})^2\psi \ . \tag{10.5}$$

Der Operator $\mathcal{T}$ ist antilinear, d.h.

$$\psi = \lambda^*\lambda\psi = |\lambda|^2\psi \tag{10.6}$$

und es ist $\lambda = e^{i\alpha}$. Nehmen wir nun $H\psi = E\psi$ und schreiben erneut um,

$$(\mathcal{PT})H\psi = (\mathcal{PT})E(\mathcal{PT})^2\psi. \tag{10.7}$$

Mit der Eigenwertgleichung von eben erhalten wir

$$H\lambda\psi = (\mathcal{PT})E(\mathcal{PT})\lambda\psi \ , \tag{10.8}$$

und schließlich

$$E\lambda\psi = E^*\lambda\psi \ . \tag{10.9}$$

Damit sehen wir, dass $E = E^*$ ist (also $E \in \mathbb{R}$). Allerdings gilt dies nur für die ungebrochene $\mathcal{PT}$-Symmetrie, wenn alle Eigenzustände von $H$ tatsächlich auch Eigenzustände von $\mathcal{PT}$sind. Andernfalls können (vgl. obiges Beispiel mit $\epsilon < 0$) komplexe Eigenwerte auftreten.

**Beispiel 10.1.5.** Wir betrachten den angesprochenen "Phasenübergang" anhand Teilchenorbits aus der klassischen Mechanik. Wir nehmen erneut den Hamiltonian $H = p^2 + x^2(ix)^\epsilon$ und erhalten die Bewegungsgleichungen gemäß

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2p \ , \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x} = i(2+\epsilon)(ix)^{1+\epsilon} \ . \tag{10.10}$$

Zusammen ergeben beide Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 2i(2+\epsilon)(ix)^{1+\epsilon} \ . \tag{10.11}$$

Integration ergibt

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{E + (ix)^{2+\epsilon}} \ . \tag{10.12}$$

Wir fassen die Zeit $t$ als eine reelle Variable auf, welche den Pfad eines Teilchens in der komplexen Ebene beschreibt. Wir reskalieren diese Gleichung zu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{1 + (ix)^{2+\epsilon}} \; . \tag{10.13}$$

Betrachten wir

$$1 + (ix)^{2+\epsilon} = 0 \; , \tag{10.14}$$

so können wir die zugehörigen Nullstellen als Umlenkpunkte der Teilchenbewegung auffassen. Wir betrachten nun verschiedene Werte von $\epsilon$, um die Struktur besser zu verstehen.

**Fall $\epsilon = 0$:** Hier gibt es nur zwei Umlenkpunkte, nämlich $x = \pm 1$. Insbesondere liegen beide auf der reellen Achse. Für einen beliebigen Anfangswert auf der rellen Achse zwischen den Umlenktpunkten beobachten wir den üblichen harmonischen Oszillator, welcher zwischen den beiden Punkten schwingt. Allgemeiner sehen wir für komplexwertige Startpunkte ellipsenförmige Trajektorien in der komplexen Ebene. Die Fokuspunkte dieser Ellipsen sind wiederum die Umlenkpunkte.
Wichtig ist hier zu sehen: alle Trajektorien sind symmetrisch bezüglich $\mathcal{P}$, also Spiegelungen durch den Ursprung, und bezüglich $\mathcal{T}$, also Spiegelungen um die reelle Achse. Zusätzlich sind sie auch symmetrisch bezüglich $\mathcal{PT}$(Spiegelungen bezüglich der imaginären Achse).

**Fall $\epsilon = 1$:** Nun gibt es drei verschiedene Umlenkpunkte. Zwei Punkte, $x_- = \exp(-5i\pi/6)$ und $x_+ = \exp(-i\pi/6)$ liegen symmetrisch um die imaginäre Achse. Sie werden also unter $\mathcal{PT}$vertauscht. Für ein Teilchen mit entsprechendem Anfangswert würden wir wieder oszillatorisches Verhalten sehen.
Anders sieht es beim Punkt $x_0$ aus: ein hier startendes Teilchen läuft Richtung $i\infty$. Die Bewegung ist nicht periodisch und weist keine Symmetrie unter $\mathcal{T}$ auf. Für andere Startwerte in der komplexen Ebene sind die Trajektorien geschlossene Orbits. Um den Punkt $x_0$ weisen sie einen “Knick” auf, der für größere Orbits stärker wird. Die Form ähnelt im Grenzfall einer Kardioiden.

**Fall $-1 < \epsilon < 0$:** Die Trajektorien für diesen Fall sind nicht mehr periodisch und weisen keine $\mathcal{PT}$-Symmetrie auf. Mit der Zeit laufen alle Trajektorien ins Unendliche. Wir fassen dies so auf, dass es eine Art Phasenübergang bei $\epsilon = 0$ gibt, nämlich vom Bereich der $\mathcal{PT}$-Symmetrie ($\epsilon \geqslant 0$) und der spontan gebrochenen $\mathcal{PT}$-Symmetrie ($\epsilon < 0$).

**Beispiel 10.1.6.** Wir betrachten den Hamiltonian von aus einer quantenmechanischen Perspektive. Das Spektrum erhalten wir durch Lösen der Schrödinger-Gleichung

$$-\psi''(x) + [x^2(ix)^\epsilon - E]\psi(x) = 0 \; , \tag{10.15}$$

was wir u.a. numerisch machen können. Im Fall von $\epsilon \geqslant 0$ erhalten wir ein reelles Spektrum mit positiven Werten. Die Werte für die Energieniveaus steigen mit steigendem $\epsilon$. Für den Fall $\epsilon = 0$ haben wir den gewöhnlichen harmonischen Oszillator mit $E_n = 2n + 1$. Wählen wir $\epsilon < 0$, so gibt es eine endliche Anzahl reeller, positiver Eigenwerte und eine unenliche Anzahl an komplex konjugierten Paaren von Eigenwerten. Die Anzahl reeller Eigenwerte nimmt mit sinkendem $\epsilon$ weiter ab; für $\epsilon \leqslant -1$ gibt es keinerlei reelle Eigenwerte.

Tatsächlich lässt sich das $n$ ausrechnen, für welches die Energie-Eigenwerte entartet sind und in die komplexe Ebene laufen.

**Bemerkung 10.1.7.** Nicht-hermitsche Hamiltonians können in verschiedenen physikalischen Teilgebieten auftauchen. So werden entsprechende Hamiltonians in der Festkörperphysik genutzt, um bestimmte Übergänge in Supraleitern zu beschreiben (hierbei wird der Hamiltonian erst durch ein externes Feld nicht-hermitesch). Während Funktionen wie $H = p + ix^3$ bereits in verschiedensten physikalischen Publikationen rund um 1980 aufgetaucht sind, so ist viel der Theorie zu $\mathcal{PT}$-symmetrischer Quantenmechanik erst Ende der 90er Jahre enstanden.

## 10.2 Gruppentheorie: Pionen

Neben der Theorie zu (Hamilton-)Operatoren haben wir uns in dieser Vorlesung intensiv mit Aspekten der Gruppentheorie auseinander gesetzt, vornehmlich mit der Darstellungstheorie. Hierbei hatten wir uns meist auf die Gruppen $SU(2)$ bzw. $SO(3)$ im Bezug auf Drehimpuls oder Elektron-Spin beschränkt. Im Folgenden betrachten wir ein paar weitere Beispiele aus dem Buch von A. Zee (*"Group Theory in a Nutshell for Physicists"*), um weitere Anwendungen der Gruppentheorie in der Physik zu sehen.

Die sog. *Pionen* wurden von Yukawa als Austauschteilchen der starken Wechselwirkung vorhergesagt. Dabei gibt es zwei geladene Pionen (und ein ungeladenes $\pi^0$), welche in den Prozessen

$$p \to n + \pi^+ \,, \qquad\qquad n \to p + \pi^- \,, \tag{10.16}$$

von Nukleonen absorbiert/emittiert werden können. Zur Zeit der Entdeckung gab es die Idee, dass man Protonen und Neutronen als bestimmte Zustände eines allgemeineren "Nukleons" auffassen können, wobei die beiden unterschiedliche Einstellungen eines sog. *Isospins* ($I_3 = \pm 1/2$) aufweisen. Also zugehörige Symmetriegruppe liegt hier zunächst die $SU(2)$ nahe, und für den Isospin von Proton und Neutron der Wert $I = \frac{1}{2}$.

**Beispiel 10.2.1.** Für das Pion kennen wir den Isospin $I_\pi$ noch nicht, aber nach unseren Überlegungen aus den vorigen Kapiteln wissen wir, dass bei Kopplung

$$\frac{1}{2} \otimes I_\pi = \left(I_\pi + \frac{1}{2}\right) \oplus \left|I_\pi - \frac{1}{2}\right| \tag{10.17}$$

gelten muss. Damit der Isospin eine Symmetrie der starken Wechselwirkung ist, muss die Darstellung mit $I = \frac{1}{2}$ des Anfangszustands enthalten sein. Dann bleiben für $I_\pi$ nur die Optionen 0 oder 1, wobei erstere ausscheidet, da es zwei Teilchen $\pi^+, \pi^-$ geben muss. Somit ist der Isospin des Pions 1. Dies ist eine drei-dimensionale irreduzible Darstellung. Dementsprechend wurde ein drittes ungeladenes Pion $\pi^0$ erwartet, welches später experimentell bestätigt wurde.
Die Beschreibung der Systeme mittels Isospin sollte unter Auslassen der elektromagnetischen Wechselwirkung exakt sein. Wir können uns anschauen, wie sich der Ladungsoperator $Q$ unter Isospin transformiert. Wir wissen für Proton und Neutron, dass

$$\Delta Q = Q(p) - Q(n) = 1 - 0 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = I_3(p) - I_3(n) = \Delta I_3 \,. \tag{10.18}$$

Damit ist $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$. Hierbei ist $Y$ die sogenannte Hyperladung, welche außerhalb der Beschreibung der $SU(2)$ liegt. Für Nukleonen muss dann $Y = 1$ und für Pionen $Y = 0$ gelten.

**Beispiel 10.2.2.** Bei Nukleon-Nukleon-Stößen kann es zur Produktion von Deuteronen kommen, nämlich über die Prozesse

$$p + p \to d + \pi^+ \,, \qquad\qquad p + n \to d + \pi^0 \,. \tag{10.19}$$

Wir wissen aus der Kopplung von (Iso-)Spins direkt, dass

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0 \tag{10.20}$$

gelten muss. Für das Deuteron haben wir also die Optionen $I = 0, 1$. Allerdings wäre das Deuteron im Falle von $I = 1$ Teil eines Tripletts, welche nie beobachtet wurden. Es muss also Isospin 0 haben. Der Endzustand für beide Nukleon-Nukleon-Prozesse hat $I = 1$, da er aus Deuteron und Pion besteht.
Für die initialen Zustände der beiden Prozesse haben wir $|p,p\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ bzw. $|p,n\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Nach unseren Berechnungen zur Spin-Kopplung im Rahmen der Clebsch-Gordan-Zerlegung ist

$$|p,n\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle - |0,0\rangle) \,. \tag{10.21}$$

Dieser Mischzustand aus $I = 1$ und $I = 0$ steht im Kontrast zum finalen Zustand mit $I = 1$. Nach Isospin-Erhaltung kann dieser nicht beitragen. Damit ist die Amplitude für den $p + p$-Kanal gegenüber dem $p + n$-Kanal um einen Faktor $\sqrt{2}$ größer. Dies ist damit gleichbedeutend, dass für die Wirkungsquerschnitte der Prozesse

$$\frac{\sigma(p + p \to d + \pi^+)}{\sigma(p + n \to d + \pi^0)} = 2 \tag{10.22}$$

gilt, da die Amplituden dort quadratisch eingehen.

**Beispiel 10.2.3.** Beim elastischen Streuprozess

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p \tag{10.23}$$

findet man experimentell eine starke Resonanz bei einer Energie von 1238 MeV, d.h. es gibt ein kurzlebiges Teilchen mit ebendieser Masse, welches wieder in das Pion-Nukleon-Paar zerfällt. Gruppentheoretisch wissen wir

$$1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \,. \tag{10.24}$$

Somit ist der Gesamtisospin entweder $3/2$ oder $1/2$. Aufgrund von Anfangs- und Endzustand kann für das unbekannte Teilchen aber nur $I = 3/2$ auftreten. Aufgrund dieses Isospins ist es Teil eines Quadrupletts ($2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$). Die drei weiteren vorhergesagten Teilchen wurden ebenfalls später entdeckt. Hierbei handelt es sich um die sogenannten *Delta-Resonanzen* $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$.

**Bemerkung 10.2.4.** Über die $SU(2)$ bzw. $SO(3)$ hinaus schaut man sich in der Teilchenphysik zudem noch die $SU(3)$ im Rahmen der Quantenchromodynamik an. Die oben besprochenen Delta-Resonanzen lieferten dabei als Teil des Spin-3/2-Dekupletts Indizien für die Existenz einer sog. *Farbladung*. Dieses Dekuplett beinhaltet zusätzlich Σ-, Ξ- und Ω-Baryonen, welche neben den Up- und Down-Quarks, die wir aus den Nukleonen und Delta-Resonanzen kennen, zusätzlich Strange-Quarks.