(6.1) ①

6. Unbeschränkte Selbstadjungierte Operatoren, unitäre Gruppen und der Satz von Stone

Der Adjungierte eines unbeschränkten Operators

Gegeben sei ein dicht definierter Operator

$$A : H \supset D_A \to H$$

in einem Hilbertraum H. ~~Wenn~~ ~~Für~~ Sei für ein $y \in H$ das lineare Funktional

$$\xi_y : H \supset D_A \to \mathbb{C},\ x \mapsto \xi_y[x] := \langle Ax, y\rangle$$

stetig bezüglich der Norm von H, d.h. ~~Wenn~~ es gebe eine Konstante $C = C(y)$, sodass

$$|\xi_y[x]| = |\langle Ax, y\rangle| \leq C_y \|x\|_H .$$

Dann kann man ξ_y in eindeutiger Weise zu einem stetigen linearen Funktional $\tilde{\xi}_y : H \to \mathbb{C}$ fortsetzen, so dass

$$|\tilde{\xi}[x]| \leq C \|x\|_H \quad \text{für alle } x \in H$$

mit derselben Konstante C wie zuvor. Nach dem ~~Satz~~ Darstellungssatz von Riesz existiert genau ein $\eta \in H$, für das

$$\tilde{\xi}[x] = \langle x, \eta\rangle \quad \text{für alle } x \in H.$$

Insbesondere hat man für $x \in D_A$, dass $\langle x, \eta\rangle = \langle Ax, y\rangle$.

<u>Def.</u>: Für $A : H \supset D_A \to H$ wie oben setzen wir

$$D_{A^*} := \{ y \in H : \cancel{x \mapsto \langle Ax, y\rangle}\ \xi_y : H \supset D_A \to \mathbb{C} \text{ ist stetig} \}$$

und $A^* : H \supset D_{A^*} \to H,\ y \mapsto A^* y := \eta$

(mit demjenigen $\eta \in H$ von oben, für das $\langle Ax, y\rangle = \langle x, \eta\rangle$ für alle $x \in D_A$). Dann heißt A^* der adjungierte Operator zu A.

Satz 1: Sei $A : H \supset D_A \to H$ dicht definiert. Dann gelten

(1) A^* ist abgeschlossen.

(2) Ist A^* dicht definiert, so ist $A \subset A^{**}\ (:= (A^*)^*)$.

In diesem Fall ist A abschließbar und $\overline{A} = A^{**}$.

~~Bew~~ (Bew.: Dirk Werner, FA.)

(6.2) Symmetrisch vs. selbstadjungiert

~~Def.: Ein Operator $A : H \supset D_A \to H$ dicht d~~

Def.: Ein dicht definierter Operator $H \supset D_A \to H$ in einem Hilbertraum H heißt

(1) symmetrisch, wenn für alle $x, y \in D_A$ gilt, dass

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle,$$

(2) selbstadjungiert, wenn $A = A^*$ ist und

(3) wesentlich selbstadjungiert, wenn $\overline{A} = A^*$ gilt.

Bem.: ~~Stets gilt~~ $\neq$

~~(1) Ist A symmetrisch, so ist $D_A \subset D_{A^*}$~~

(1) Jeder selbstadjungierte oder auch nur wesentlich* selbstadjungierte Operator ist symmetrisch, die Umkehrung gilt nicht, ~~es gilt~~ ~~man hat~~ sondern lediglich:

(2) Ist A symmetrisch, so gelten $D_A \subset D_{A^*}$ und $A \subset A^*$ sowie $\overline{A} \subset \overline{A^*} = A^*$.

damit

denn in diesem Fall hat man $\overset{=\langle \overline{A}x, y\rangle}{\langle Ax, y\rangle} = \langle x, A^* y\rangle = \overset{\langle x, Ay\rangle}{\langle x, \overline{A} y\rangle}$ für alle $x, y \in D_A$.

Bsp.: Der Laplace-Operator

$$\Delta : L^2(\mathbb{R}^n) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \Delta f$$

ist symmetrisch, wie man durch 2-malige partielle Integration sieht. Die Graphennorm ist gegeben durch

$$\|f\|_{D_\Delta}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\Delta f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{H^2},$$

bezüglich der $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nicht vollständig ist. Δ ~~(wie oben defi-niert)~~ ist mit diesem Definitionsbereich also nicht abgeschlossen und daher auch nicht selbstadjungiert.

Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$ dicht ist,(*) ist die Abschließung von Δ (wie oben) gegeben durch

$$\overline{\Delta} : L^2(\mathbb{R}^n) \supset H^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \overline{\Delta} f = \mathcal{F}^{-1}(-|\xi|^2)\mathcal{F} f.$$

$\overline{\Delta}$ ist selbstadjungiert, denn das lineare Funktional

$$\xi_g : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \xi_g[f] = \int \Delta f \, \overline{g} \, dx$$

$$\underset{\text{Plancherel}}{=} -\int |\xi|^2 \hat{f} \, \overline{\hat{g}} \, d\xi = \int \hat{f} \, \overline{(-|\xi|^2 \hat{g})} \, d\xi$$

ist genau dann stetig, wenn $g \in H^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Also ist Δ mit Definitionsbereich $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ wesentlich selbstadjungiert. □

Die Überprüfung der Selbstadjungiertheit mit Hilfe der Definition wird oft sehr mühsam. Die folgenden Kriterien sind nützlich:

(*) wie wir uns in der Übung überlegt haben

6.3 Kriterien für Selbstadjungiertheit und wesentliche Selbstadjungiertheit

Eine notwendige Bedingung liefert

Lemma 1: Ist $A: H \supset D_A \to H$ selbstadjungiert, so ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Notwendige und hinreichende Bedingungen für Selbstadjungiertheit enthält der folgende

Satz 2: Sei $A: H \supset D_A \to H$ dicht definiert und symmetrisch. Dann sind äquivalent:

(1) $A = A^*$;

(2) ~~N(A~~ A ist abgeschlossen und $N(A^* \pm iI) = \{0\}$.

(3) $A \pm iI : D_A \to H$ sind surjektiv.

Bem.: (1) Einen Beweis zeigt man (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1), wobei man sich für (2) $\Rightarrow$ (3) überlegen muss, dass für dicht definierte Operatoren A gilt (X)

$$N(A^* \mp iI) = R(A \pm iI)^\perp .$$

(2) Teil (3) des Satzes liefert die für den Gebrauch ~~...~~ nützliche hinreichende Bedingung. Da für symmetrische Operatoren stets p.t.o.

$$\|(A \pm iI)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2 \quad \forall x \in D_A$$

bzw. mit $y = (A \pm iI)x \in H$

$$\|(A \pm iI)^{-1} y\|^2 \leq \|y\|^2$$ zwar gilt, ist (3) etwas schwächer, aber nahezu gleichwertig zu $\pm i \in S(A)$. (**)

(Für weitere Einzelheiten sei erneut auf Werner, FA, Kap. VII.2 verwiesen.)

(3) Beachtet man $A^* = \overline{A}^*$ (Warum gilt das?) und (x), so erhält man als Folgerung aus Satz 2 das folgende Kriterium für wesentliche Selbstadjungiertheit: (5)

Corollar 1: Für einen symmetrischen, dicht definierten Operator $A: H \supset D_A \to H$ sind äquivalent:

(1) $\overline{A} = A^*$, d.h. A ist wesentlich selbstadjungiert;

(2) $N(A^* \pm iI) = \{0\}$;

(3) $A \pm iI : D_A \to H$ ~~sind~~ haben dichtes Bild.

(6.4) Positiv semidefinite Operatoren

Def.: $A: H \supset D_A \to H$ heißt positiv semidefinit, wenn $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in D_A$.

Bem. und Bsp.: (1) Jeder positiv semidefinite Operator ist symmetrisch.

(2) Der negative Laplace-Operator $-\Delta : L^2(\mathbb{R}^n) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ist positiv semidefinit. Das gilt auch, wenn $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch $H^2(\mathbb{R}^n)$ ersetzt wird. Entsprechendes gilt bei periodischen Randbedingungen.

~~Für positiv semidefinite Operatoren können die Kriterien aus (6.3) etwas vereinfacht werden.~~

Ist $A: H \supset D_A \to H$ selbstadjungiert und positiv semidefinit, so gilt $\sigma(A) \subset [0, \infty)$. Die weiteren Kriterien aus (6.3) können etwas vereinfacht werden:

Satz 3: Sei $A: H \supset D_A \to H$ dicht definiert und positiv semidefinit. ⑥
Dann sind äquivalent:

(1) $A = A^*$;

(2) A ist abgeschlossen und $N(A^* + I) = \{0\}$

(3) $A + I: D_A \to H$ ist surjektiv.

Folgerung: Für einen dicht definierten, positiv semidefiniten Operator $A: H \supset D_A \to H$ sind äquivalent:

(1) $\bar{A} = A^*$, d.h. A ist wesentlich selbstadjungiert;

(2) $N(A^* + I) = \{0\}$;

(3) $A + I: D_A \to H$ hat dichtes Bild.

(6.5) Unitäre Gruppen

Jetzt wenden wir uns der Dynamik zu, die durch unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren im einem Hilbertraum generiert wird.

Def.: Eine Schar $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ unitärer Operatoren in einem Hilbertraum H heißt eine (stark stetige) unitäre Gruppe, falls gilt (1) $U(0) = I$

(2) $U(t+s) = U(t)\,U(s)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$

(3) $\lim_{t \to 0} U(t)x = x$ für alle $x \in H$. ("Starke Stetigkeit")

Bsp.: Ist $A \in L(H)$ selbstadjungiert, so wird durch $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ mit $U(t) = e^{itA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itA)^k}{k!}$ eine unitäre Gruppe gegeben.
Für unbeschränkte Operatoren ist eine solche Definition

mit Hilfe der Potenzreihe nicht möglich – in welchem Sinne sollte diese konvergieren? Um im Fall unbeschränkter Operatoren Ersatz zu schaffen, fasst man die erwünschten Eigenschaften in einer Definition zusammen. Die unitäre Gruppe $(e^{itA})_{t\in\mathbb{R}}$ ist durch $A\in L(H)$ eindeutig bestimmt, man kann auch sagen, sie wird "von A erzeugt" oder "generiert". Dementsprechend definiert man den folgenden Begriff, bei dem auch unbeschränkte Operatoren zugelassen sind:

Def.: Sei $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine unitäre Gruppe auf einem Hilbertraum H. Der <u>infinitesimale Generator</u> von $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ist der Operator

$$Ax := -i \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)-I)x$$

mit dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D}_A := \{x\in H : \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U(t)-I)x \text{ existiert}\}.$$

Bem.: (1) Würde man in der Definition einer "unitären Gruppe" die Eigenschaft (3) (starke Stetigkeit) durch die stärkere Normstetigkeit

$$\lim_{t\to 0} U(t)=I \text{ in der Operatornorm}$$

ersetzen, so wäre der infinitesimale Generator einer solchen Gruppe beschränkt, die Gruppe also ungeeignet zur Behandlung partieller Dglen.

8

(2) Es sei $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine unitäre Gruppe mit Generator A, $\psi_0 \in D_A$ und $\psi(t) = U(t)\psi_0$. Dann löst ψ das abstrakte Cauchy-Problem

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t}(t) + A\psi(t) = 0, \qquad \psi(0) = \psi_0, \qquad \text{(ACP)}$$

die Lösung ist eindeutig in $C_b(\mathbb{R}, H)$ und der Lösungsoperator

$$S : H \supset D_A \longrightarrow C_b(\mathbb{R}, H), \quad \psi_0 \longmapsto S\psi_0 := \psi$$

ist (Lipschitz-) stetig, d.h. (ACP) ist (zeitlich global) wohlgestellt.

(3) Wir werden sehen, dass $D_A \subset H$ dicht ist. Daher erlaubt S eine eindeutig bestimmte Fortsetzung

$$\tilde{S} : H \longrightarrow C_b(\mathbb{R}, H).$$

(4) Auch die Umkehrung von (2) ist zutreffend! Wenn (ACP) wohlgestellt ist (für einen bestimmten Operator $A : H \supset D_A \to H$), so erzeugt A eine unitäre Gruppe. Dazu definiert man für $\psi_0 \in D_A$ mit Lösung ψ die Operatorenschar $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ durch

$$U(t)\psi_0 := \psi(t),$$

setzt diese nach (3) auf den gesamten Hilbertraum H fort und überprüft die definierenden Eigenschaften.

Einfache grundlegende Eigenschaften unitärer Gruppen und ihrer Erzeuger enthält das folgende Lemma, was ohne Beweis angegeben sei:

Lemma 1: Sei $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine unitäre Gruppe mit Generator $A: H \supset D_A \to H$. Dann gelten:

(1) $\forall t \neq 0, x\in H$: $\int_0^t U(s)x\,ds \in D_A$ und es gilt

$$+iA\int_0^t U(s)x\,ds = (U(t)-I)\,x.$$

(2) $x\in D_A \Rightarrow U(t)x \in D_A \quad \forall t\in\mathbb{R}.$

(3) $x \in D_A \Rightarrow U(t)Ax = AU(t)x \quad \forall t\in\mathbb{R}$

(4) Für alle $x\in D_A$ ist $+i\int_0^t U(s)Ax\,ds = (U(t)-I)x.$

Satz 4: Der infinitesimale Generator $A: H\supset D_A \to H$ einer unitären Gruppe $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf einem Hilbertraum H ist selbstadjungiert ~~und dicht definiert~~.

Bew.: (1) Nach Lemma 1 (1) ist für jedes $x\in H$ $\frac{1}{t}\int_0^t U(s)x\,ds \in D_A$. Da nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (vektorwertige Version) gilt, dass

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds = f(0),$$

ist D_A dicht in H.

(2) Wegen $U^*(t) = U(t)^{-1} = U(-t)$ ist für $x, y \in H$

$$\langle \frac{1}{it}(U(t)-I)x, y\rangle = \langle x, \frac{1}{-it}(U(-t)-I)y\rangle.$$

Für $x, y \in D_A$ folgt mit $\lim_{t\to 0}$, dass $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. Das ist die Symmetrie von A.

(3) Sei $(x_n)_n$ eine Folge in D_A mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in H$ und $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y \in H$. Dann ist nach Lemma 1 (4)

$$\frac{1}{it}(U(t)-I)x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{it}(U(t)-I)x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t U(s)Ax_n\,ds$$
$$\underset{\text{Lebesgue}}{=} \frac{1}{t}\int_0^t U(s)y\,ds.$$

Nach dem Hauptsatz existiert der Grenzwert

$$y = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t U(s)y\,ds = \lim_{t\to 0} \frac{1}{it}(U(t)-I)x.$$

Daher ist $x \in D_A$ und $Ax = y$. Das zeigt die Abgeschlossenheit von A.

(4) Seien $x_\pm \in N(A^* \mp iI)$, also $A^* x_\pm = \pm i x_\pm$. Dann ist für $x \in D_A$

$$\frac{d}{dt}\langle U(t)x, x_\pm\rangle = i\langle A\overset{U(t)}{}x, x_\pm\rangle = i\langle \overset{U(t)}{}x, A^* x_\pm\rangle = \pm\langle U(t)x, x_\pm\rangle,$$

also $\quad \langle U(t)x, x_\pm\rangle = e^{\pm t}\langle x, x_\pm\rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

Da $|\langle U(t)x, x_\pm\rangle| \le \|x\|\,\|x_\pm\|$, folgt $\langle x, x_\pm\rangle = 0 \quad \forall x \in D_A$, d.h. $x_\pm \in D_A^\perp = \{0\}$, letzteres nach Teil (1) des Beweises.

Nach Satz 2 ((1)⇔(2)) ist A selbstadjungiert. □

Konsequenz: Die Selbstadjungiertheit des Hamilton-Operators ist die notwendige Voraussetzung für quantale Dynamik. Symmetrie allein reicht nicht aus!

(6.6) Der Satz von Stone (1932)

Auch die Umkehrung von Satz 4, nämlich

<u>Satz 5</u>: Jeder selbstadjungierte Operator in einem Hilbertraum H erzeugt eine unitäre Gruppe.

ist zutreffend, allerdings schwieriger zu zeigen. Die Sätze 4 und 5 zusammen ergeben den substantiellen

<u>Satz von Stone:</u> Genau dann erzeugt ein linearer Operator $A : H \supset D_A \to H$ eine unitäre Gruppe, wenn A selbstadjungiert ist.

Für den Satz 5 gibt es zwei Beweise:

(1) Konstruktion mit Hilfe der "Yosida-Approximationen" durch Grenzwertbildung

(2) Verwendung des Spektralsatzes für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren.

Beide sind zu lang für diese Vorlesung, ich muss mich also auf einige Hinweise beschränken.

(6.6.1) Die Konstruktion von Hille-Yosida (1948)

Gegeben sei ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator $A : H \supset D_A \to H$. Hierzu definiert man die "Yosida-Approximationen"

$$A_k := kA(k-iA)^{-1} = \frac{1}{i}\left(k^2(k-iA)^{-1} - kI\right) \in L(H)$$

und zeigt, dass für $x \in D_A$ gilt $\lim_{k\to\infty} \| Ax - A_k x \| = 0$.

Obwohl die A_k nicht selbstadjungiert sind, kann man Gruppen $T_k(t) := \exp(itA_k)$ von Evolutionsoperatoren (als Potenzreihen) definieren. Z.z. sind dann:

(1) Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} T_k(t)x =: U(t)x$ existiert

(i) für alle $x \in D_A$ und (ii) für alle $x \in H$.

(2) $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist eine unitäre Gruppe.

(3) Der Generator dieser Gruppe ist A.

Die Ausführung dieses Programms lässt sich im Laufe einer Vorlesung (90 min) erledigen, was ein großer Vorteil ist. Zum anderen läßt sich das Argument für unbeschränkte Operatoren in Banachräumen ebenso durchführen (und ist tatsächlich für diese allgemeine Situation entwickelt worden), sofern gewisse Bedingungen an das Spektrum und die Resolvente dieser Operatoren erfüllt sind.

(6.6.2) Spektralmaße

<u>Def.</u>: Ein Spektralmaß auf $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$E : \mathcal{B} \longrightarrow L(H) \qquad (H \text{ Hilbertraum})$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Für jedes $B \in \mathcal{B}$ ist $E(B)$ eine orthogonale Projektion, es gilt $E(\emptyset) = 0$ und $E(\mathbb{R}) = I$.

(2) $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2) \quad \forall B_{1,2} \in \mathcal{B}$

(3) $E(B_1 + B_2) = E(B_1) + E(B_2) \quad \forall B_{1,2} \in \mathcal{B}$ mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

(4) Für alle $x \in H$ ist $E_x : \mathcal{B} \to \mathbb{R},\ B \mapsto \langle E(B)x, x\rangle$ ein Maß auf $\mathbb{R}$. (E_x ist ein Lebesgue-Stieltjes-Maß.)

Für eine Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ erklärt man das Integral nach einem Spektralmaß durch

$$I_f := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dE(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f\, dE$$

genau dann, wenn ~~für alle x ∈ dichten~~ es einen dichten Teilraum $D \subset H$ gibt, so dass für alle $x \in D$ ~~gilt~~

$$\langle I_f x, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dE_x(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f\, dE_x .$$

Der zentrale Satz in diesem Zusammenhang ist der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren:

Zu jedem selbstadjungierten Operator A auf einem Hilbertraum H existiert genau ein Spektralmaß E auf $\mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp}(E) \subset \sigma(A)$, so dass

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE(\lambda).$$

(s. z.B. Satz 20.13 in Meise/Vogt: Einführung FA; der Beweis erstreckt sich über mehrere Kapitel dieses Buches.)

Bsp. 1: Spektralmaß eines Multiplikators auf $H = L^2(\Omega)$

Es seien $V \in L^2_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ und $M_V : L^2(\Omega) \supset D_{M_V} \to L^2(\Omega)$ definiert durch $M_V f(x) := V(x) f(x)$ mit Definitionsbereich $D_{M_V} := \{ f \in L^2(\Omega) : M_V f \in L^2(\Omega) \}$.

Dann ist M_V selbstadjungiert.

Für $B \in \mathcal{B}$ definieren wir

$$E(B) f(x) := \chi_{\{y \in \Omega : V(y) \in B\}}(x) \cdot f(x) = \chi_B(V(x)) \cdot f(x),$$

also $E(B) = M_{\chi_B \circ V}$.

Aufg.: Überprüfen Sie, dass hierdurch ein Spektralmaß definiert wird.

Nun sei $t = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \chi_{B_k}$ eine Treppenfunktion mit $B_k \in \mathcal{B}$ für die $E_f(B_k) < \infty$, $(f \in L^2(\Omega))$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}} t(\lambda) \, dE_f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \chi_{B_k}(\lambda) \, dE_f(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k E_f(B_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \int_{\Omega} \chi_{B_k}(V(x)) |f(x)|^2 dx \qquad \text{nach obiger Wahl von } E(B)$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \chi_{B_k}(V(x)) \cdot |f(x)|^2 dx = \int_{\Omega} t(V(x)) |f(x)|^2 dx.$$

Der Konstruktion des Integrals nach einem Maß folgt hieraus für eine meßbare Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda)\, dE_f(\lambda) = \int_{\Omega} \varphi(V(x))\, |f(x)|^2 dx,$$

sofern die Integrale für φ_+ und φ_- endlich ausfallen. Für $\varphi(\lambda) = \lambda$ ergibt sich $\int \lambda\, dE(\lambda) = M_V$. Wir können aber anscheinend auch $\varphi(M_V) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda)\, dE(\lambda)$ mit Hilfe des Spektralmaßes erklären.

Bsp. 2: Sei $A : H \supset D_A \longrightarrow H$ ein Operator mit einem "reinem Punktspektrum", d.h. es gebe eine ONB $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von H aus Eigenvektoren e_k von A zu Eigenwerten $\lambda_k \in \mathbb{C}$ von endlicher Vielfachheit. ($D_A := \{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\langle x, e_k \rangle|^2 < \infty \}$; wenn A selbstadjungiert sind, sind alle $\lambda_k \in \mathbb{R}$). Hier ist

$$E(B)\, x := \sum_{\lambda_k \in B} \langle x, e_k \rangle e_k$$

ein Spektralmaß, und eine Darstellung des Operators entsprechend dem Spektralsatz ist

$$A x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \qquad (x \in D_A).$$

Auch in diesem Fall können wir Funktionen des Operators definieren durch

$$\varphi(A)\, x = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k) \langle x, e_k \rangle e_k$$

mit $D_{\varphi(A)} := \{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(\lambda_k)|^2 |\langle x, e_k \rangle|^2 < \infty \}$.

(6.6.3) Funktionalkalkül für selbstadjungierte Operatoren

Nun definiert man für Borel-messbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ den Operator

$$f(A) := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dE(\lambda),$$

d.h. für $x \in D_{f(A)} := \{x \in H : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 dE_x(\lambda) < \infty\}$

setzt man $\langle f(A)x, x\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dE_x(\lambda)$.

Für den so definierten Funktionalkalkül eines selbstadjungierten Operators $A: H \supset D_A \to H$ in einem Hilbertraum H ~~[illegible]~~ hat man

Satz 6: Seien $E: \mathcal{B} \to L(H)$ das Spektralmaß von A und $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Borel-messbar. Dann gelten:

(1) $f(A)$ ist ein abgeschlossener Operator.

(2) $f(A)^* = \bar{f}(A)$, insbesondere ist $f(A)$ selbstadjungiert, wenn f reell ist.

(3) $f(A) f(A^*)^* = |f|^2(A) = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 dE(\lambda) = f(A)^* f(A)$,

insbesondere ist für alle $x \in D_{f(A)}$:

$$\|f(A)x\|^2 = \langle f(A)^* f(A)x, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 dE_x(\lambda).$$

(4) $f(A) g(A) \subset (f \cdot g)(A)$ mit $D_{f(A) \cdot g(A)} = D_{g(A)} \cap D_{(f \cdot g)(A)}$.

Hat man den Funktionalkalkül bis zu diesem Punkt entwickelt, ist einigermaßen klar, wie der Satz 5 zu beweisen ist:

Man setzt $U(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dE(\lambda)$ und weist mit Hilfe von Satz 6 die Eigenschaften einer unitären Gruppe nach. Ähnlich wie die starke Stetigkeit sieht man mit Hilfe von (3) für

$$x \in D_A = \{x \in H : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 dE_x(\lambda) < \infty\}$$

ein, dass

$$\|(\tfrac{1}{it}(U(t)-I) - A)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left|\frac{e^{it\lambda}-1}{it} - \lambda\right|^2}_{\lesssim \lambda^2} dE_x(\lambda) \underset{(t\to 0)}{\to} 0,$$

was bedeutet, dass A der Generator von $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ist.