8. Summen selbstadjungierter Operatoren: Kato-Störungen und Kato's L^2_{loc}-Theorem

Aufgrund des Satzes von Stone ist die Selbstadjungiertheit (oder zumindest die wesentliche Selbstadjungiertheit) des Hamilton-Operators

$$\hat{H} : H \supset D_{\hat{H}} \to H$$

hinreichend aber auch notwendig für die (zeitlich globale) Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \qquad \psi(0) = \psi_0 \in D_{\hat{H}}$$

für die Schrödinger-Gleichung mit Daten in $D_{\hat{H}}$.

Der Hamilton-Operator hat die Struktur $\hat{H} = -\Delta + V$ mit den Bestandteilen

$$-\Delta : H \supset D_1 \to H, \quad \psi \mapsto -\Delta\psi \qquad \text{und}$$

$$V : H \supset D_2 \to H, \quad \psi \mapsto V\psi, \quad V\psi(x) := V(x)\psi(x).$$

Hierbei sind $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ und $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zumindest Borel-messbare Funktion. D_1 und D_2 werden als dichte lineare Teilräume von H gewählt, üblich ist die Festlegung $D_1 = D_2 = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, was auf die Bedingung

$$V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f\chi_K \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \forall \text{ kompakt } K \subset \mathbb{R}^n \}$$

führt. Beide Operatoren sind symmetrisch, aber nur für $D_1 = H^2(\mathbb{R}^n)$ und $D_2 = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : Vf \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$

selbstadjungiert.

Die Summe zweier unbeschränkter Operatoren $A: H \supset D_A \to H$ und $B: H \supset D_B \to H$ wird üblicherweise definiert durch

$$A+B: H \supset D_{A+B} := D_A \cap D_B \to H, \quad x \mapsto (A+B)x := Ax + Bx.$$

Das ist ebenso naheliegend wie problematisch, z.B. kann auch für dicht definierte Operatoren $D_A \cap D_B = \{0\}$ sein. Derartiges kann man in der Regel ausschließen, indem man voraussetzt, dass $D_A \cap D_B$ dicht ist, oder indem man zuerst die Abschließungen bildet und dann erst die Summe.

Wenn die Summe zweier (wesentlich) selbstadjungierter Operatoren wieder (wesentlich) selbstadjungiert sein soll, wie es beim Hamilton-Operator $\hat{H} = -\Delta + V$ der Fall ist, können erhebliche Probleme auftreten.

Bsp. 1 (1): Die Raumdimension sei $n=1$, $H = L^2(\mathbb{R})$,

$$-\frac{d^2}{dx^2}: H \supset H^2(\mathbb{R}) \to H, \quad \psi \mapsto -\psi''$$

(Distributionsableitung), sowie

$$V: H \supset D_V \to H, \quad \psi \mapsto V\psi, \quad V\psi(x) = V(x)\psi(x) = -x^4\psi(x)$$

mit dem Definitionsbereich $D_V = \{f \in H : Vf \in H\}$.

---

(1) Aus: Brian C. Hall: Quantum Theory for Mathematicians, Abschnitt 9.10. Dort finden Sie auch noch einige weitere rechnerische Einzelheiten.

Damit sind beide Operatoren selbstadjungiert, der „Laplace-Operator" $-\frac{d^2}{dx^2}$ ebenso wie der Multiplikator V.

Weiter sei

$$D_{H_0} \subset H^2(\mathbb{R}) \cap D_V$$

irgendein dichter ~~[illegible]~~ linearer Teilraum von $L^2(\mathbb{R})$ (z.B. $D_{H_0} = C_0^\infty(\mathbb{R})$ oder $D_{H_0} = S(\mathbb{R})$) und

$$H_0 : H \supset D_{H_0} \to H, \quad \psi \mapsto H_0\psi := \left(-\frac{d^2}{dx^2} - x^4\right)\psi .$$

Wir zeigen, dass H_0 <u>nicht wesentlich selbstadjungiert</u> ist:

(1) Wir definieren für $\alpha \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}$

$$p_\alpha(x) = \sqrt{x^4 + i\alpha} \quad \text{und} \quad u_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{p_\alpha(x)}} \exp\left(i\int_0^x p_\alpha(t)\,dt\right),$$

wobei $\sqrt{}$ den Hauptzweig der komplexen Wurzel bezeichnet. Jetzt rechnet man nach, dass

$$|\mathrm{Im}\, p_\alpha(t)| \leq C_\alpha \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

und somit

$$|u_\alpha(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

sodass $u_\alpha \in L^2(\mathbb{R})$ ist.

(2) Durch elementare Berechnung der Ableitungen verifiziert man, dass

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - x^4\right) u_\alpha(x) = \left(i\alpha + m_\alpha(x)\right) \cdot u_\alpha(x),$$

wobei

$$m_\alpha(x) = \frac{3x^2}{x^4 + i\alpha} - \frac{5x^6}{(x^4+i\alpha)^2}.$$

Wir sehen, dass m_α beschränkt ist und dass eine von α unabhängige Konstante $C>0$ existiert, so dass $\|m_\alpha\|_\infty \le C$.

(3) Für alle $v \in D_{H_0}$ ist

$$|\langle H_0 v, u_\alpha\rangle| = \Big|\int_{\mathbb{R}} \big(-\tfrac{d^2}{dx^2} - x^4\big) v(x)\, \overline{u_\alpha(x)}\, dx\Big|$$

beachte: $\big(-\frac{d^2}{dx^2}-x^4\big)$ $u_\alpha \notin D_{H_0}$

$$= \Big|\int_{\mathbb{R}} v(x)\, \overline{\big(-\tfrac{d^2}{dx^2} - x^4\big) u_\alpha(x)}\, dx\Big| = |\langle v, \cancel{H_0}\, u_\alpha\rangle|$$

$$= |\langle v, (m_\alpha + i\alpha) u_\alpha\rangle| \le \|v\|_{L^2} (C + |\alpha|) \|u_\alpha\|_{L^2}.$$

D.h. für jedes u_α $(\alpha \ge 1)$ ist das lineare Funktional

$$y_\alpha : H \supset (D_{H_0}, \|\ \|_H) \longrightarrow \mathbb{C},\quad v \longmapsto y_\alpha[v]$$

mit $y_\alpha[v] = \int \cancel{\nabla}\, H_0 v(x)\, \overline{u_\alpha(x)}\, dx$ stetig und

also $u_\alpha \in D_{H_0^*}$.

(4) Weiter ist nach obiger Rechnung für alle $v \in D_{H_0}$

$$\langle v, H_0^* u_\alpha\rangle = \langle H_0 v, u_\alpha\rangle = \langle v, \overset{(m_\alpha + i\alpha)}{\cancel{H_0}}\, u_\alpha\rangle$$

und somit $H_0^* u_\alpha(x) \underset{(2)}{=} (m_\alpha(x) + i\alpha) u_\alpha(x)$, so dass

$$(H_0^* - i\alpha) u_\alpha(x) = m_\alpha(x) u_\alpha(x)$$

und $\|(H_0^* - i\alpha I) u_\alpha\|_{L^2} \le \|m_\alpha\|_\infty \|u_\alpha\|_{L^2} \le C \|u_\alpha\|_{L^2}.$

(5) Nehmen wir H_0 als wesentlich selbstadjungiert ⑤ an, so ist $H_0^* = \overline{H_0}$ symmetrisch und daher

$$\|(H_0^* - i\alpha I)u_\alpha\|_{L^2} \geq \alpha \underbrace{\|u_\alpha\|_{L^2}}_{\gtrsim \alpha^{3/4}} \longrightarrow \infty \quad (\alpha \to \infty)$$

im Widerspruch zur letzten Ungleichung in (4). □

Bem.: Weder $x^4 u_\alpha$ noch u_α'' liegen in $L^2(\mathbb{R})$. Es ist also $u_\alpha \notin D_{H_0}$!

Die Behauptung der wesentlichen Selbstadjungiertheit eines Operators

$$H_0 : H \supset D_{H_0} \to H, \qquad H_0 = -\Delta + V$$

ist also selbst für stetige, reelle Potentiale $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nicht immer zutreffend und bedarf des Beweises. Ein nützliches Kriterium hierfür liefert der

<u>Störungssatz von Kato-Rellich</u>: Es seien H ein Hilbertraum, $A : H \supset D_A \to H$ ein selbstadjungierter und $B : H \supset D_B \to H$ ein symmetrischer linearer Operator mit $D_A \subset D_B$. Es gebe ein $\delta \in [0, 1)$ und ein $C \geq 0$, so dass für alle $x \in D_A$ die Abschätzung

$$\|Bx\| \leq \delta \|Ax\| + C\|x\|$$

gilt. Dann ist $A + B : H \supset D_A \to H$ selbstadjungiert.

Bem.: (1) Der Satz umfasst insbesondere den Fall, dass B stetig und selbstadjungiert ist. Dann kann man nämlich $\delta = 0$ wählen.

(2) Ein Operator B wie im Störungssatz wird häufig als Kato-Störung des Operators A bezeichnet.

Bew. des Störungssatzes: Wir zeigen:

(!)

Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $A + B \pm i\delta I : H \supset D_A \to H$ surjektiv ist.

(Dann ist auch $\frac{1}{\delta}(A+B) \pm iI : H \supset D_A \to H$ surjektiv und nach dem Kriterium für Selbstadjungiertheit $\frac{1}{\delta}(A+B) : D_A \to H$ selbstadjungiert. Hieraus folgt die Selbstadjungiertheit von $A+B$.)

Zum Beweis von (!) greifen wir auf $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ zurück, woraus folgt, dass für jedes $\delta > 0$

$$(A \pm i\delta I)^{-1} : H \longrightarrow D_A \quad \in L(H).$$

Es besteht die folgende Situation:

$$\begin{tikzcd}
 & D_A \arrow[dr, "A+B\pm i\delta I"] & \\
H \arrow[ur, "(A\pm i\delta I)^{-1}"] \arrow[rr, "(A+B\pm i\delta I)(A\pm i\delta I)^{-1}"'] & & H
\end{tikzcd}$$

Zu zeigen ist also

$(A + B \pm i\delta I)(A \pm i\delta I)^{-1} = I + B(A \pm i\delta I)^{-1} : H \longrightarrow H$

ist surjektiv. Nach dem Satz über die Neumannsche Reihe ist dafür hinreichend

$$B(A\pm i\varrho I)^{-1}\in L(H) \quad \text{und} \quad \|B(A\pm i\varrho I)\|<1. \quad (!!)$$

Nun ist für alle $x\in D_A$

$$\|(A\pm i\varrho I)x\|^2 = \|Ax\|^2+\varrho^2\|x\|^2$$

und daher

$$\|Ax\|\le\|(A\pm i\varrho I)x\| \quad \text{und} \quad \|x\|\le\frac{1}{\varrho}\|(A\pm i\varrho I)x\|.$$

Anwendung auf $y=(A\pm i\varrho I)x\in H$ ergibt

$$\|A(A\pm i\varrho I)^{-1}y\|\le\|y\| \quad \text{und} \quad \|(A\pm i\varrho I)^{-1}y\|\le\frac{1}{\varrho}\|y\|.$$

Damit ergibt sich für $y\in H$

$$\|B(A\pm i\varrho I)^{-1}y\| \underset{\text{Vor.}}{\le} \delta\|A(A\pm i\varrho I)^{-1}y\|+C\|(A\pm i\varrho I)^{-1}y\|$$

$$\le \delta\|y\|+\frac{C}{\varrho}\|y\| = \left(\delta+\frac{C}{\varrho}\right)\|y\|.$$

Da $\delta<1$ ist, kann ϱ so groß gewählt werden, dass (!!) erfüllt ist. $\square$

Bsp.: In $n=3$ Raumdimensionen sei $V(x)=\dfrac{c}{|x-x_0|}$ das Coulomb-Potential einer Punktladung an der Stelle $x_0\in\mathbb{R}^3$ und

$$\hat{H}: H=L^2(\mathbb{R}^3)\supset H^2(\mathbb{R}^3)\to H, \quad \hat{H}=-\Delta+V.$$

Dann ist V eine Kato-Störung von $-\Delta: H\supset H^2(\mathbb{R}^3)\to H$ und somit $\hat{H}$ selbstadjungiert.

Bew.: Wir zerlegen $V = V_1 + V_2$ mit $V_1 = V \cdot \chi_{B_1(x_0)}$ und (8)

$V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann ist

$$\| V_1 \|_{L^2}^2 = |C| \int_{B_1(x_0)} |x - x_0|^{-2} dx = 4\pi |C| \int_0^1 r^{-2} r^2 dr = 4\pi |C| < \infty,$$

also $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Nun ist

$$\| V_1 u \|_2 \leq \| V_1 \|_2 \| u \|_{L^\infty} \leq C \| V_1 \| \| u \|_{H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)} \quad \begin{pmatrix} \text{Sobolev-} \\ \text{scher ES} \end{pmatrix}$$

$$\leq C \cdot \| V_1 \|_2 \| u \|_{H^2}^{1-\theta} \| u \|_{L^2}^{\theta} \quad \begin{pmatrix} \text{für ein geeignetes } \theta \in (0,1) \\ \text{Ungl. von Gagliardo-} \\ \text{Nirenberg} \end{pmatrix}$$

$$\leq C \| V_1 \|_2 \left(\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}} \| u \|_{H^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\theta}} \| u \|_{L^2} \right) \quad \begin{pmatrix} \text{elementare} \\ \text{Young-Ungl.} \end{pmatrix}$$

$$\leq \delta \| u \|_{H^2} + \tilde{C} \| u \|_{L^2}$$ mit einem $\delta \in (0,1)$, wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist.

Dann ist V_1 eine Kato-Störung von $(-\Delta)$ und der beschränkte Multiplikator V_2 eine Kato-Störung von $-\Delta + V_1$. Zusammen folgt die Beh. □

Bem.: Das Argument lässt sich verallgemeinern zu folgender Aussage:

Sei $N \in \mathbb{N}$ fest und $n \in \mathbb{N}$ die Raumdimension. Für $j \in \{1, \dots, N\}$ seien $p_j > \frac{n}{2}$ (bzw. $p_j \geq 2$ im Fall $n \leq 3$) und $V = \sum_{j=1}^{N} V_j$ mit $V_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$-\Delta + V : L^2(\mathbb{R}^n) \supset H^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

selbstadjungiert.

Viele Potentiale $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ werden von diesem Störungsargument leicht erfasst, z.B. solche mit

$$\lim_{x\to\infty} V(x) = \infty \qquad (*)$$

wie das Oszillatorpotential. Auch wenn $(*)$ nur auf einem Halbraum oder einem Kegel positiver Öffnung gilt, ist V weder in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ noch in irgendeinem anderen $L^p(\mathbb{R}^n)$. Es stellt sich heraus, dass das Vorzeichen von V einen entscheidenden Unterschied macht. Ein Durchbruch gelang Tosio Kato 1972 mit dem folgenden

<u>L^2_{loc}-Theorem:</u> Sei $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ mit $V(x) \geq 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$H_0 : L^2(\mathbb{R}^n) \supset D_{H_0} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

definiert durch $H_0 u(x) = -\Delta u(x) + V(x)u(x)$. Dann ist H_0 wesentlich selbstadjungiert. Die Abschließung von H_0 ist gegeben durch

$$\hat{H} : L^2(\mathbb{R}^n) \supset D_{\hat{H}} \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto \hat{H}u = (-\Delta + V)u$$

mit dem Definitionsbereich

$$D_{\hat{H}} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) : (-\Delta + V)u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Bem.: (1) Es liegen 40 Jahre zwischen Stone's Thm. und Kato's L^2_{loc}-Thm.!

(2) Es gibt verschiedene Verallgemeinerungen, die im wesentlichen bereits in Katos lediglich 14 Seiten umfassenden Arbeit enthalten sind:

(i) Der Laplace-Operator kann ersetzt werden durch $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i b_k(x)\right)^2$ mit $b_k \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

(ii) Es gibt dimensionsabhängige Konstanten $C_n \geq 0$, so dass die Voraussetzung $V(x) \geq 0$ ersetzt werden kann durch die schwächere $V(x) \geq -C_n |x|^{-2}$. (Für $n \geq 5$ und große γ ist $-\Delta - \gamma |x|^{-2}$ mit Definitionsbereich $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nicht wesentlich selbstadjungiert!)

(iii) Zu $\hat{H}$ kann noch ein weiteres Potential $\tilde{V}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beliebigen Vorzeichens hinzuaddiert werden, welches eine Kato-Störung von $-\Delta$ ist. (Die letzte Aussage folgt nicht aus dem Störungssatz, weil man in $D_{\hat{H}}$ nur Kontrolle über die H^1- nicht aber über die H^2-Norm hat!)

Der Beweis des L^2_{loc}-Theorems in der oben angegebenen Formulierung zerfällt in zwei Teile. Zuerst zeigt man (und das ist verhältnismäßig einfach), dass der Operator $\hat{H}$ selbstadjungiert ist.

Lemma 1: Es sei $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^4, [0,\infty))$ und

$$\hat{H} : L^2(\mathbb{R}^4) \supset D_{\hat{H}} \to L^2(\mathbb{R}^4), \; u \mapsto \hat{H}u = (-\Delta + V)u$$

mit dem Definitionsbereich

$$D_{\hat{H}} := \{ u \in H^1(\mathbb{R}^4) : V|u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^4) \wedge \hat{H}u \in L^2(\mathbb{R}^4) \}.$$

Dann ist $\hat{H} \geq 0$, $\hat{H} = \hat{H}^*$ und es gilt

$$D_{\hat{H}} = \{ u \in H^1(\mathbb{R}^4) : \hat{H}u \in L^2(\mathbb{R}^4) \}.$$

Bew.: (1) Zuerst überzeugt man sich davon, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^4) \subset D_{\hat{H}}$, so dass $\hat{H}$ dicht definiert ist.

(2) Für $u \in D_{\hat{H}} \subset H^1(\mathbb{R}^4)$ ist

$$\langle \hat{H}u, u \rangle_{L^2} = \int (-\Delta u)(x)\,\bar{u}(x) + V(x)|u(x)|^2 dx$$
$$= \int |\nabla u(x)|^2 dx + \int V(x)|u(x)|^2 dx \geq 0,$$

so dass $\hat{H}$ positiv semidefinit und insbesondere symmetrisch ist. Ferner lesen wir ab, dass

$$u \in H^1(\mathbb{R}^4) \wedge \hat{H}u \in L^2(\mathbb{R}^4) \Rightarrow V|u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^4),$$

was die Aussage über den Definitionsbereich ergibt.

(3) Um die Selbstadjungiertheit von $\hat{H}$ einzusehen, reicht es aufgrund eines unserer Kriterien für die Selbstadjungiertheit positiv semidefiniter Operatoren, zu zeigen, dass

$$I + \hat{H} : D_{\hat{H}} \to L^2(\mathbb{R}^4)$$

surjektiv ist.

Zu zeigen ist also:

Zu jedem $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existiert ein $u \in D_{\hat{H}}$, so dass $\hat{H}u + u = f$. (!)

Dazu sei $H := H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, V d\lambda^n) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) : V|u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_H = \langle u, v \rangle_{H^1} + \langle u, v \rangle_{L^2(V d\lambda^n)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\bar{v}(x) + \langle \nabla u(x), \nabla \bar{v}(x) \rangle + V(x) u(x) \bar{v}(x) \, dx.$$

Da $H^1(\mathbb{R}^n)$, $L^2(V d\lambda^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit linearer stetigen Einbettung, handelt es sich bei H um einen Hilbertraum.

Zu $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definieren wir jetzt eine Linearform

$$y_f : H \to \mathbb{C}, \quad u \mapsto y_f[u] = \langle u, f \rangle_{L^2}.$$

y_f ist stetig, da $|y_f[u]| = |\langle u, f \rangle_{L^2}| \le \|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \le \|u\|_H \|f\|_{L^2}$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es ein $u_f \in H$, so dass $y_f[u] = \langle u, u_f \rangle_H$ $\forall u \in H$, ausgeschrieben:

$$\int u \bar{f} \, dx = \int u \bar{u}_f + \langle \nabla u, \nabla \bar{u}_f \rangle + V u \bar{u}_f \, dx \quad \forall u \in H.$$

Das gilt insbesondere für alle $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und somit

$$f = u_f - \Delta u_f + V u_f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Wegen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $u_f \in H \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt $(-\Delta + V) u_f = \hat{H} u_f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Außerdem ist $u_f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ $(\supset H)$, so dass $u_f \in D_{\hat{H}}$. Damit ist (!) gezeigt. $\square$

Deutlich aufwändiger ist der Beweis der

Proposition 1: $H_0 : L^2(\mathbb{R}^n) \supset D_{H_0} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, $H_0 = -\Delta + V$ ist wesentlich selbstadjungiert.

Den Schlüssel dazu liefert

Lemma 2 (Katos Ungleichung): Für $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\Delta |u| \geq \mathrm{Re}(\mathrm{sign}(u)\Delta u),$$

wobei $\mathrm{sign}(u) = \begin{cases} \frac{\bar{u}}{|u|} & : u \neq 0 \\ 0 & : u = 0 \end{cases}$.

(Die Ungleichung ist distributionell zu verstehen: $u \geq v$ bedeutet: $\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} v(x) f(x)\, dx. \quad)$$

(Hier ohne Bew., zu umfangreich. S. Simon oder Reed/Simon!)

Beweisskizze für Prop. 1:

Man verwendet das Kriterium für wesentliche Selbstadjungiertheit positiv semidefiniter Operatoren und zeigt

$$N(H_0^* + I) = \{0\}.$$

Da man $D_{H_0^*}$ noch nicht kennt, beweist man:

Ist $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft

$$\langle u, (H_0 + I) f \rangle_{L^2} = 0 \quad \text{für alle } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad (E)$$

So ist $u = 0$. Dazu absolviert man die folgenden Schritte:

(1) Gilt (E), so ist $\Delta u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und die Gleichung

$$\Delta u = Vu + u$$

gilt in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und auch punktweise f.ü..

(2) Es ist $\Delta|u| \geq 0$ (im Distributionssinne). Das ist insofern entscheidend, als hier Katos Ungleichung eingeht, und soll daher ausgeführt werden:

Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geq 0$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta|u|(x) f(x)\,dx \overset{\text{Katos Ungl.}}{\geq} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}(\mathrm{sign}(u(x))\Delta u(x))\, f(x)\,dx$$

$$= \mathrm{Re} \int_{\{u \neq 0\}} \frac{\overline{u(x)}}{|u(x)|} \Delta u(x) f(x)\,dx \qquad \text{(jetzt: } \Delta u = (V+1)u!)$$

$$= \mathrm{Re} \int_{\{u \neq 0\}} \frac{\overline{u(x)}}{|u(x)|} (V(x)+1)u(x) f(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|(V(x)+1) f(x)\,dx \geq 0.$$

(3) Man setzt $w_\varepsilon := J_\varepsilon * |u|$ ($(J_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ Friedrichs-Mollifier).

Dann gilt einerseits

$$\langle w_\varepsilon, \Delta w_\varepsilon \rangle = -\langle \nabla w_\varepsilon, \nabla w_\varepsilon \rangle \leq 0.$$

Andererseits ist $w_\varepsilon \geq 0$ und nach (2) auch

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y) \Delta|u(x-y)|\,dy = J_\varepsilon * \Delta|u|(x) = \Delta(J_\varepsilon * |u|)(x)$$

$= \Delta w_\varepsilon(x)$, woraus $\langle w_\varepsilon, \Delta w_\varepsilon \rangle \geq 0$ folgt.

Zusammen mit Plancherel

$$0 = \langle w_\varepsilon, \Delta w_\varepsilon \rangle = -\int_{\mathbb{R}^4} |\xi|^2 |\hat{w}_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi .$$

Daraus folgen $\hat{w}_\varepsilon = 0$, $w_\varepsilon = 0$, $|u| = \lim_{\varepsilon \to 0} w_\varepsilon = 0$ und schließlich $u = 0$. $\square$

Schließlich sind noch Prop. 1

$$H_0 \subset \overline{H_0} = \overline{H_0}^* = H_0^*$$

und Lemma 1

$$H_0 \subset \hat{H} = \hat{H}^*$$

zusammenzufügen. Hieraus folgen

$$\overline{H_0} \subset \hat{H} \qquad \text{und} \qquad \overline{H_0} = H_0^* \supset \hat{H}^* = \hat{H} ,$$

also $\overline{H_0} = \hat{H}$, und damit die volle Aussage des auf S. 9 formulierten L^2_{loc}-Theorems.