Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Dr. Lars Reichwein

SoSe 2024
23.05.2024
Blatt 5

ÜBUNGEN ZU
HÖHERE METHODEN DER ANALYSIS IN DER PHYSIK

Zum Problem der Eindeutigkeit bei der Wärmeleitungsgleichung: Im folgenden soll eine nichttriviale Lösung des Cauchy-Problems $u(x,0) = 0$ für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) \qquad ((x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T))$$

konstruiert werden. Dazu sei

$$g\colon \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0\} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto g(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right).$$

(a) Zeigen Sie mit der Cauchyschen-Integralformel für die Ableitungen einer holomorphen Funktion: Es gibt ein $\theta \in (0,1)$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und für alle $t > 0$

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2t^2}\right).$$

Integrieren Sie dazu über $\partial B_r(t)$ mit $r = \theta t$ und wählen Sie θ hinreichend klein.

(b) Beweisen Sie, dass die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

(i) auf $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ lokal gleichmäßig konvergiert,
(ii) durch $|u(x,t)| \leq \exp\left(\frac{x^2}{\theta t} - \frac{1}{2t^2}\right)$ abgeschätzt und
(iii) durch $u(x,0) = 0$ stetig auf $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ fortgesetzt werden kann.

(c) Begründen Sie, dass die Reihe aus (b) gliedweise nach $t > 0$ (und zweimal nach $x \in \mathbb{R}$) differenziert werden darf und dass

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

(d) Geben Sie für $n \geq 2$ eine Lösung $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ von $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t)$ mit $u(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ an. (u sollte nicht konstant bezüglich $x_2, x_3, \ldots, x_n$ sein.)

Bitte wenden!

Desgleichen für die freie Schrödinger-Gleichung: Konstruieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse eine nichttriviale Lösung $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ der freien Schrödinger-Gleichung

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0,$$

die der Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genügt.