Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Dr. Lars Reichwein

Düsseldorf, den 13.06.2024

6. Übungsblatt zur Vorlesung „Höhere Methoden der Analysis in der Physik“

Aufgabe 1: Noch mehr Klammern

Wir wollen im Folgenden die sog. *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel* (BCH-Formel) “herleiten”, welche uns einen Zusammenhang zwischen der algebraische Struktur einer Lie-Gruppe und der algebraischen Struktur der zugehörigen Lie-Algebra liefert. Wir werden sehen, dass ein großer Teil dieser Information in der Lie-Klammer (bzw. hier im Kommutator) codiert ist.

(a) Zeigen Sie induktiv $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$, $n \in \mathbb{N}$ (analog funktioniert $[A^n, B]$).

(b) Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, dass $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Zeigen Sie, dass

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

gilt. Zeigen Sie dafür zunächst, dass für $f(t) = e^{tA}e^{tB}$ die Ableitung die Form

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = (A + B + t[A, B])f$$

hat, und lösen Sie anschließend diese Differentialgleichung.