Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Dr. Lars Reichwein

Düsseldorf, den 27.06.2024

7. Übungsblatt zur Vorlesung „Höhere Methoden der Analysis in der Physik“

Aufgabe 1: Abelsche Gruppen

Zeigen Sie, dass für eine abelsche Gruppe G alle Elemente einer eigenen, einelementigen Äquivalenzklasse angehören.

Aufgabe 2: Noch ein bisschen Gruppentheorie

Wir wollen eine Charaktertafel für die 6-elementige Gruppe $D_3 = \langle b, c | c^3 = b^2 = (bc)^2 = e \rangle$ erstellen. Diese hat drei Äquivalenzklassen

$$K_1 = \{e\}\ , \qquad K_2 = \{c, c^2\}\ , \qquad K_3 = \{b, bc, bc^2\}\ .$$

Die Tafel soll am Ende die folgende Gestalt haben:

D_3	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(2)}$
e			
b			
c			

Gehen Sie für die Erstellung folgendermaßen vor:

(a) Überlegen Sie, dass es tatsächlich nur drei nicht-äquivalente, irreduzible Darstellungen gibt. Die Spalte für die triviale Darstellung, $\chi^{(1)}$, können Sie sofort ausfüllen.

(b) Nutzen Sie die Relation $\sum_r d_r^2 = |G|$ zwischen den Dimensionen d_r dieser Darstellungen und der Ordnung $|G|$ der Gruppe, um jeweils den Charakter des neutralen Elements einzutragen.

(c) Betrachten Sie $\chi^{(2)}(b)$ und nutzen Sie die Eigenschaften des Charakters, um zu sehen, dass $\chi^{(2)} = 1$. Nutzen Sie anschließend die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{|G|} \sum_i = |K_i| \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\nu)*} = \delta^{\mu\nu}\ ,$$

um $\chi^{(2)}(b)$ zu bestimmen.

(d) Nutzen Sie die Orthogonalitätsrelation mit $\mu = 1, \nu = 3$ sowie $\mu = 2, \nu = 3$, um ein Gleichungssystem für die beiden verbleibenden Einträge aufzustellen und lösen Sie dieses.

Aufgabe 3: Noch mehr Gruppentheorie

Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}_4$ und die Klein'sche Vierergruppe $V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nicht zueinander isomorph sind.