Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Dr. Lars Reichwein

Düsseldorf, den 11.07.2024

9. Übungsblatt zur Vorlesung „Höhere Methoden der Analysis in der Physik“

Aufgabe 1: (Fast) eine Isomorphie

Wir hatten bereits in den Grundlagen zur Darstellungstheorie angedeutet, dass die Gruppen $SU(2)$ und $SO(3)$ lokal zueinander isomorph sind. Dies wollen wir uns nun näher anschauen.

Wir drücken im Folgenden die Matrix $X = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ über die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

aus. Dementsprechend ist $X = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3$ hermitesch und spurlos.

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass $X' := U^\dagger X U$ für $X \in SU(2)$ hermitesch und spurlos ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\det X = \det X'$. Folgern Sie damit, dass $\vec{x}$ in $\vec{x}'$ rotiert wird.

(c) Zu jedem $U \in SU(2)$ können wir also eine Drehung $R \in SO(3)$ assoziieren. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon U \to R$ die Gruppen-Multiplikation erhält.

(d) Überlegen Sie: definiert dies wirklich einen Isomorphismus?

Hausaufgabe (freiwillig): Spaß mit Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Bei der Pion-Nukleon-Streuung kommt es zur Kopplung zwischen Pionen (Isospin $I = 1$) und Nukleonen ($I = \frac{1}{2}$), in gruppentheoretischer Schreibweise $1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Anmerkung: Sie finden die Lösung dafür im Buch von S. Scherer ("Symmetrien und Gruppen in der Teilchenphysik"). Alternativ finden Sie eine tabellarische Auflistung der Koeffizienten auf der Webseite der Particle Data Group (PDG).