

1. Einführung: Evolutionsgleichungen; einige funktionalanalytische Hilfsmittel

1.1 Einführung: Evolutionsgleichungen

Evolutionsgleichungen sind Differentialgleichungen, die die zeitliche Entwicklung eines Systems beschreiben. Einige gewöhnliche Dgl. dieses Typs haben wir bereits in der Analysis II kennen gelernt. Das reichlich einfachste Beispiel ist die homogene lineare Dgl. 1. Ordnung

$$y'(t) = a y(t), \quad a \in \mathbb{C} \text{ fest}, \quad (1)$$

deren allgemeine Lösung die Exponentialfunktion

$$y(t) = C e^{at} = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!}, \quad C \in \mathbb{C},$$

ist. Wird zusätzlich eine Anfangsbedingung $y(0) = y_0 \in \mathbb{C}$ gestellt, so erzwingt dies die Eindeutigkeit der Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und man hat $y(t) = y_0 e^{at}$. Dasselbe Anfangswertproblem für die entsprechende inhomogene Gleichung

$$y'(t) = a y(t) + f(t) \quad (2)$$

mit einer gegebenen Funktion $f \in C(I, \mathbb{C})$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in I$) hat die Lösung

$$y(t) = e^{at} \left(y_0 + \int_0^t e^{-as} f(s) ds \right) = e^{at} y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds,$$

was als "Variation der Konstanten-Formel" oder auch

als "Duhamel-Formel" bekannt ist. Die Verallgemeinerung
auf Systeme erster Ordnung der Form

$$y'(t) = Ay(t) + f(t) \quad (3)$$

bedeutet eine konstante Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
und eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{C}^n$. Damit
überwindet man alle rechnerischen Schwierigkeiten, wenn man
auf die Matrix-Exponentialfunktion

$$\exp: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, \quad A \mapsto \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

vertraut ist. Die ebenfalls eindeutige Lösung
 $y \in C^1(I, \mathbb{C}^n)$ des Anfangswertproblems $y(0) = y_0 \in \mathbb{C}^n$
für das inhomogene System (3) sieht genauso
aus wie im Fall einer einzelnen Gleichung; sie
lässt sich

$$y(t) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds. \quad (4)$$

Auch hier spricht man von einer "Duhamel-Formel"
oder versteht das Integral darin als "Duhamel-Teil".

Nun soll es in dieser Vorlesung allerdings um
partielle Dglen. gehen, die eine zeitliche Evolution
beschreiben. Typische Beispiele homogener linearer
Gleichungen dieser Art sind:

(1) Die Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung

③

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$,

(2) die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \Delta u(t, x) = V(x)u(t, x), \quad (t, x) \in I \times \Omega,$$

dabei ist Δ wie zuvor der Laplace-Operator und V eine "Potential" Funktion $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und zugleich der Multiplikationsoperator mit eben diesem Potential;

(3) die Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \Delta u(t, x) + u^2 u(t, x) = 0, \quad u \in \mathbb{R},$$

die für $u=0$ in die klassische Wellengleichung übergeht.

Wie aus der "Einführung in PDE" bekannt ist, müssen wir - ähnlich wie bei den ODE's - Anfangsbedingungen stellen, um die Eindeutigkeit der Lösung zu erreichen.

Für (1) und (2) schreiben wir

$$u(0, x) = u_0(x)$$

vor, während für die Gleichung 2. Ordnung hier zwei Bedingungen erforderlich sind, nämlich

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x).$$

Der Gegensatz zu den gewöhnlichen Dgl. sind also da-
her hier nicht einzelne Werte, sondern Funktionen

der Orts- (oder sonstiger) Variablen. Häufig muss man ⁽⁴⁾ zusätzlich noch Randbedingungen fordern, z.B. die Dirichlet-Randbedingung $u(t, \cdot) \big|_{\partial\Omega} = 0$.

Ignorieren wir die Einzelheiten, so können wir in (1) bis (3) die gleichesame Struktur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = Au(t, x), \quad u(0, x) = u_0(x)$$

erkennen und diese als ein Cauchy-Problem für die gewöhnliche Dgl.

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad u(0) = u_0 \in E \quad (5)$$

auffassen und mit dem homogenen System

$$y'(t) = Ay(t) \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{C}^n$$

erster Ordnung mit Anfangswert y_0 vergleichen:

- An die Stelle der Matrix A tritt in (5) eine lineare Abbildung, z.B. der Laplace-Operator im Bsp. (1) oder der Operator $-i(-\Delta + V)$ in der Schrödinger-Gleichung. In diesem letzteren Operator $\hat{H} := -\Delta + V$ wird als "Hamilton-Operator" bezeichnet. Die Klein-Gordon-Gleichung müssen wir in ein System 1. Ordnung umwandeln, um die einfache Gestalt (5) zu erreichen, dazu gibt es mehrere Möglichkeiten.

- Der Anfangswert u_0 ist ein Element eines Funktionenraums E , der üblicherweise und in dieser Vorlesung stets als ein Banachraum gewählt wird, z.B. $L^p(\Omega)$ oder $C(\bar{\Omega})$. Ggf. berücksichtigt man bei

der Wahl von E bereits Rand- oder sonstige Nebenbedingungen.

(Zur Erinnerung: Ein Banachraum ist ein normierter ⑤
Vektorraum, der bezüglich seiner Norm vollständig ist. In
Folgender werde ich häufig die Abkürzung B -Raum ver-
wenden.)

- Die gesuchte Lösung $u \in C^1([0, \infty), E)$ ist eine stetig
differenzierbare Funktion der reellen Variable $t \geq 0$
mit Werten in E . Die Ableitung solcher Funktionen ist
wie in der Analysis I definiert als

$$\frac{du}{dt}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u(t+h) - u(t)),$$

wobei allerdings zu beachten ist, dass der Grenzwert be-
züglich der Norm auf E gebildet wird, d.h. es ist

$$v(t) = \frac{du}{dt}(t) \iff \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (u(t+h) - u(t)) - v(t) \right\|_E = 0.$$

Rechenregeln für Ableitungen stehen hier sehr be-
quem zur Verfügung. Das Integral für B -Raum-
wertige Funktionen, das sogenannte Bochner-Inte-
gral, ist Gegenstand des vorherigen Abschnitts 1.

Ist die skizzierte Auffassung partieller Differential-
gleichungen als gewöhnliche Dgl. für B -Raum-
wertige Funktionen benötigt nur zur Lösung des
Cauchy-Problems (5) "nur noch" eine Verallgemei-
nerung der Matrix-Exponentialfunktion, bei der
lineare Operatoren $A \in \{\Delta, -i\hat{H}, \dots\}$ wie in (5) als
Argumente zugelassen sind. Notwendig ist der

Versuch, für lineare Abbildungen A

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

als Potenzreihe zu erklären. Die allgemeinste Struktur, in der dies möglich ist, ist die einer Banachalgebra ($= B$ -Algebra), das ist ein B -Raum $(A, \|\cdot\|)$ mit einer Multiplikation

$$\cdot : A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

so dass die Norm $\|\cdot\|$ submultiplikativ ist, d.h. es gilt

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\| \quad \forall a, b \in A.$$

Die Gesamtheit $L(E)$ aller beschränkten ($=$ stetigen) linearen Abbildungen $A : E \rightarrow E$ eines B -Raumes E in sich bildet eine solche B -Algebra, die Multiplikation ist die Verküpfung linearer Abbildungen, und als Identität ist sogar ein Element gegeben. Hiermit werden wir uns im Abschnitt 1.2 kurz beschäftigen; das ist aber nicht zielführend, da die relevanten Differentialoperatoren $\Delta, \hat{H}$ usw. allesamt unbeschränkt sind, das heißt, sie haben keine endliche Operatornorm und sind nicht auf dem gesamten Raum E definiert.

Bsp.: Es sei $E = C([0,1])$ versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ und

$$\frac{d}{dx} : E \supset D_{\frac{d}{dx}} := C^1([0,1]) \rightarrow E, f \mapsto \frac{df}{dx} = f'$$

Definiert den Bereich des Operators $\frac{d}{dx}$

die ("klassische") Ableitung. Für $u \in \mathbb{N}$ sei weiter $f_u(x) = x^u$.

Dann ist $f_u \in E$ mit $\|f_u\|_{\infty} = 1$ und $\frac{df_u}{dx}(x) = u x^{u-1}$, so

dass $\| \frac{df}{dx} \|_{\infty} = 4$ und damit

$$\sup \{ \| \frac{df}{dx} \|_{\infty} : f \in E, \| f \|_{\infty} \leq 1 \} = \infty.$$

Für unbeschränkte Operatoren $A : E \supset D_A \rightarrow E$ ist die Definition einer Serie $(e^{tA})_{t \geq 0}$ von Evolutionsoperatoren weder durch eine Potenzreihe noch durch eine andere ähnlich einfache Berechnungsvorschrift möglich. Stattdessen fasst man die erforderlichen Eigenschaften wie z. B. die Funktionalgleichung in einer Definition der sogenannten "stark stetigen Halbgruppen" (kurz: "C⁰-Halbgruppen") zusammen und zeigt dann, dass diese die Lösung des allgemeinen Cauchy-Problems (5) liefern. Dieser Begriff wird in Abschnitt 2.1 eingeführt und anschließend in Kap. 2 die grundlegende Theorie dieser Halbgruppen entwickelt – das ist der zentrale Gegenstand dieser Vorlesung. In Kap. 3 spezialisieren wir uns auf Hilberträume und diskutieren eine Reihe von Anwendungen, insbesondere auf Schrödingergleichungen. Schließlich geht es in Kap. 4 um nichtlineare und semilineare Gleichungen.

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + F(u(t)).$$