

1.2 Die Banach-Algebra $L(E)$

(7)

$(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ seien normierte Vektorräume über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, in aller Regel unendlichdimensional.

Def.: Eine lineare Abbildung $A: E \rightarrow F$ heißt beschränkt, wenn

$$\|A\|_{E \rightarrow F} := \sup \{ \|Ax\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1 \} < \infty \quad \text{ist.}$$

Man nennt $\|A\|_{E \rightarrow F}$ die Operatornorm von A .

Bem.: (1) $A: E \rightarrow F$ ist genau dann beschränkt, wenn eine Konstante $C \geq 0$ existiert, so dass $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E$.

Es gilt

$$\|A\|_{E \rightarrow F} = \inf \{ C > 0 : \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E \}.$$

(2) Durch $\|A\|_{E \rightarrow F}$ wird eine Norm auf dem Vektorraum

$$L(E, F) := \{ A: E \rightarrow F : A \text{ ist linear und beschränkt} \}$$

definiert. $L(E, F)$ ist ein Untervektorraum oder linearer Testraum von $\text{Hom}(E, F)$, dem Vektorraum aller linearer Abbildungen $A: E \rightarrow F$.

(Bew. beider Beme. als Übungsaufgabe)

Bem.: Oft schreibt man kurz $\|A\|$ statt $\|A\|_{E \rightarrow F}$, wenn zuvor angegeben wurde, welches Definitions- und Zielbereich A hat. Entsprechend für $\|Ax\|_F$ und $\|x\|_E$.

$L(E, F)$ enthält gerade alle stetigen linearen Abbildungen $A: E \rightarrow F$. Genaues gilt:

(2)

Satz 1: Sei $A: E \rightarrow F$ linear. Dann sind äquivalent:

- (1) A ist beschränkt, d.h. $A \in L(E, F)$,
- (2) A ist global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\|A\|_{E \rightarrow F}$,
- (3) A ist gleichmäßig stetig,
- (4) A ist stetig,
- (5) A ist stetig im Nullpunkt.

Bew.: (1) $\Rightarrow$ (2): Ist $A \in L(E, F)$, so gilt für alle $x, y \in E$

$$\|Ax - Ay\|_F = \|A(x - y)\|_F \leq \|A\|_{E \rightarrow F} \|x - y\|_E.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5): klar.

(5) $\Rightarrow$ (1): Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|Ax\|_F \leq 1 \quad \text{für alle } x \in E \text{ mit } \|x\|_E \leq \delta.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|A\|_{E \rightarrow F} &= \sup \{ \|Ax\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1 \} \\ &= \frac{1}{\delta} \sup \{ \|A\delta x\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1 \} \end{aligned}$$

$$(y = \delta x) \quad = \frac{1}{\delta} \sup \{ \|Ay\|_F : y \in E, \|y\|_E \leq \delta \} \leq \frac{1}{\delta} < \infty.$$

□

Satz 2: $L(E, F)$ ist vollständig, wenn F ein B -Raum ist. ③

Bew.: Sei F vollständig und $(A_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $L(E, F)$. Dann ist für ein beliebiges $x \in E$

$$\|A_n x - A_m x\|_F = \|(A_n - A_m)x\|_F \leq \|A_n - A_m\|_{E \rightarrow F} \|x\|_E \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. $(A_n x)_n$ ist eine Cauchy-Folge in F und somit konvergiert. Das erlaubt die Definition

$$A: E \rightarrow F, x \mapsto Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x.$$

Die Abbildung A ist linear, und aufgrund der Stetigkeit der Norm gilt

$$\|Ax\|_F = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \right\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\|_F \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|_{E \rightarrow F} \|x\|_E$$

Also ist $A \in L(E, F)$. Um $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\|_{E \rightarrow F} = 0$ einzusehen, sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n, m \geq N_0$ gilt $\|A_n - A_m\|_{E \rightarrow F} \leq \varepsilon$. Dann ist für alle $n \geq N_0$, $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$

$$\|A_n x - Ax\|_F = \left\| A_n x - \lim_{m \rightarrow \infty} A_m x \right\|_F$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_n x - A_m x\|_F \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|A_n - A_m\|_{E \rightarrow F} \|x\|_E \leq \varepsilon$$

und also

$$\|A - A_n\|_{E \rightarrow F} = \sup \{ \| (A_n - A)x \|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1 \} \leq \varepsilon.$$

□

Einen linearen Teilraum von $L(E, F)$ bilden die kompakten Operatoren.

Def.: Es seien $A: E \rightarrow F$ linear und $B_E := \{x \in E: \|x\|_E \leq 1\}$. ④

A heißt kompakt, wenn $A(B_E)$ in $(F, \|\cdot\|_F)$ relativ kompakt ist, d.h. wenn $\overline{A(B_E)}$ in $(F, \|\cdot\|_F)$ kompakt ist.

Man setzt $K(E, F) := \{A: E \rightarrow F: A \text{ ist linear und kompakt}\}$.

Beweis: (1) Ist F vollständig, so ist ein linearer Operator

$A: E \rightarrow F$ genau dann kompakt, wenn für jede beschränkte Folge $(x_n)_n$ in E die Bildfolge $(Ax_n)_n$ eine in F konvergente Teilfolge besitzt.

(2) Auch in unendlich-dimensionalen normierten Vektorräumen sind Kompakta beschränkt. Daher gilt $K(E, F) \subset L(E, F)$.

(3) Wenn F vollständig ist, ist $K(E, F)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $L(E, F)$ und damit selbst ein B -Raum. Zum Beweis der Abgeschlossenheit verwendet man ein Diagonalfolgenargument; s. z. B. Werner, Satz II.3.2 (a).

(4) Sind D, E, F, G B -Räume, $A \in K(E, F)$, $S \in L(D, E)$ und $T \in L(F, G)$, so ist $TAS \in K(D, G)$. ("Ideal-eigenschaft" kompakter Operatoren)

(5) Sind E und G B -Räume, so bezeichnet man mit

$$F(E, G) := \{A \in L(E, G) : \dim A(E) < \infty\}$$

den Vektorraum aller linearen Abbildungen mit

endlich-dimensionalen Bild. Da jeder endlich-dim. ⑤
 B -Raum isomorph zu einem $\mathbb{K}^n$ ist, sind die Opera-
 toren $A \in F(E, G)$ nach Bolzano-Weierstraß kompakt.
 Also gelten

$$F(E, G) \subset \overline{F(E, G)} \subset K(E, G) \subset L(E, G),$$

hierbei ist der Abschluss der Operatornorm ge-
 meint. Die Operatoren in $\overline{F(E, G)}$ nennt man approxi-
 mierbar. Sind H und G Hilberträume (= H -Räume),
 so gilt $K(H, G) = \overline{F(H, G)}$, was nicht offensichtlich
 ist. Hingegen gibt es B -Räume E und G , für die
 $\overline{F(E, G)} \subsetneq K(E, G)$ ist (Enflo, - erst! - 1973).

(6) In dieser Vorlesung geht es in erster Linie um un-
 beschränkte Operatoren, ein genaueres Studium von
 $K(E, F)$ bleibt daher der Vorlesung "Einführung FA"
 vorbehalten. Für die Theorie partieller Dgl. sind al-
 lerdings kompatte Einbettungsoperatoren zwischen
 Funktionsräumen verschiedener Regularitäten
 von Bedeutung.

Bsp.: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und, für $\gamma \in (0, 1]$,

$$C^{0, \gamma}(K) := \{f: K \rightarrow \mathbb{C} : [f]_{\gamma} < \infty\}$$

ist der Halbraum

$$[f]_{\gamma} := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\gamma}} : x, y \in K, x \neq y \right\}$$

der Räume der zum Exponenten γ global Hölder-stetigen

Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{C}$. Durch

⑥

$$\|f\|_{0,\gamma} := \|f\|_{\infty} + [f]_{\gamma}$$

wird $C^{0,\gamma}(K)$ normiert. Für jedes $\gamma \in (0,1]$ ist die Einbettungsabbildung

$$I_{\gamma}: C^{0,\gamma}(K) \rightarrow C(K), f \mapsto I_{\gamma}f := f$$

kompakt. Begründung: Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli¹⁾ besitzt jede Folge $(f_n)_n$ in $C(K)$ eine konvergente Teilfolge, wenn sie

(1) gleichmäßig beschränkt ist, d.h. wenn $\|f_n\| \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit irgendeiner Konstanten $C > 0$ gilt;

(2) gleichmäßig stetig ist, d.h. wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ so dass } \forall x, y \in K \text{ mit } |x - y| < \delta, n \in \mathbb{N} \\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Ist wenn $(f_n)_n$ in $C^{0,\gamma}(K)$ mit $\|f\|_{0,\gamma} \leq 1$, so ist zwar $\|f_n\|_{\infty} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$, sodass (1) erfüllt ist, und zwar auch

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq [f]_{\gamma} |x - y|^{\gamma} \leq |x - y|^{\gamma} \quad \forall x, y \in K.$$

Also ist (2) ebenfalls erfüllt (zu $\varepsilon > 0$ wähle man $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\gamma}}$). Damit ist die Kompaktheit von I_{γ} gezeigt.

Wenn K zudem konvex ist, zeigt dasselbe Argument in Verbindung mit dem Mittelwertsatz, dass auch die Einbettung $C^1(K) \subset C(K)$ kompakt ist.

Die Normformel folgt wiederum aus einem der fun- ⑧
damentalen Sätze der linearen Funktionalanalysis, dem

Satz von Hahn-Banach: Sei E ein normierter $\mathbb{K}$ -
Vektorraum, $F \subset E$ ein linearer Teilraum und $y \in F'$.
Dann existiert ein $Y \in E'$ mit $Y|_F = y$ und $\|Y\|_{E'} = \|y\|_{F'}$.

("Jedes stetige lineare Funktional auf einem linearen
Teilraum eines normierten Vektorraums lässt sich
auf den gesamten Raum fortsetzen, ohne die Norm
zu vergrößern." - Für den Beweis, allgemeinere Versi-
onen und verführende Diskussionen sei auf die
Vorlesung "Einführung FA" verwiesen.)

Wie sieht man damit die Normformel ein?

Zu gegebenem $x \in E$ wählt man $F = \mathbb{K}x = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}$
und definiert $y \in F'$ durch $y[\lambda x] := \lambda \|x\|_E$. Dann
ist $y[x] = \|x\|_E$ und

$$\|y\|_{F'} = \sup \{ |y[\lambda x]| : \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\|_E \leq 1 \}$$

$$= \sup \{ |\lambda| \|x\|_E : \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \|x\|_E \leq 1 \} = 1.$$

Nach Hahn-Banach kann y zu $Y \in E'$ fortgesetzt
werden, so dass $Y[x] = y[x] = \|x\|_E$ und $\|Y\|_{E'} =$

$\|y\|_{F'} = 1$. Damit ist (ii) gezeigt.

kehren wir zurück von den Kompaktheit zu den lediglich stetigen linearen Operatoren und diskutieren zwei wichtige Spezialfälle:

(1) Der "topologische" Dualraum eines normierten Vektorraumes E , das ist

$$E' := L(E, \mathbb{K}),$$

also der Raum aller stetigen linearen Funktionale $y: E \rightarrow \mathbb{K}$. Der Zusatz "topologisch" deutet den Abgrenzungszweck "algebraische" Dualraum E^* , das ist der Raum aller linearen Funktionale auf E . Da $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ vollständig ist, ist E' nach Satz 2 ein B -Raum. Das Studium von E' ist der (unvermeidbare) Gegenstand der Funktionalanalysis. Von zwei Aussagen werden wir wiederholt Gebrauch machen:

(i) E' ist ausreichend groß, um die Punkte von E zu trennen, d.h.

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \exists y \in E' : y[x] \neq 0$$

so dass

$$\forall x_1, x_2 \in E \text{ mit } x_1 \neq x_2 \exists y \in E' : y[x_1] \neq y[x_2].$$

Diese Aussage folgt aus:

$$(ii) \quad \forall x \in E \exists y \in E' \text{ mit } \|y\|_{E'} = 1 \text{ und } y[x] = \|x\|_E,$$

also: $\|x\| = \max \{ |y[x]| : y \in E', \|y\|_{E'} \leq 1 \}$ (Normformel)

Der Satz von Hahn-Banach und die Folgerungen (i) und (ii) daraus sind keineswegs selbstverständlich. Legt man z.B. einem lediglich quasi-normierten Vektorraum zugrunde, was bedeutet, dass die Dreiecksungleichung durch die schwächere

$$\|x+z\| \leq C(\|x\| + \|z\|) \quad \text{mit einem } C > 1$$

ersetzt wird, so gibt es im Allgemeinen nicht genügend stetige lineare Funktionale, um (i) und (ii) zu gewährleisten. Z.B. gibt es auf $L^p([0,1], \lambda)$ für $p \in (0,1)$ mit Quasi-Norm $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$ kein stetiges lineares Funktional außer dem Nullfunktional.

(2) Die normierte Algebra $L(E)$: Im Fall $E=F$ schreiben wir $L(E) := L(E, E)$ (und entsprechend $K(E) := K(E, E), \dots$). Das ist ein normierter Vektorraum und ein B -Raum, wenn E selbst vollständig ist. Neben Addition und skalarer Multiplikation steht hier mit der Verknüpfung linearer Abbildungen

$$\cdot : L(E) \times L(E) \rightarrow L(E), (A, B) \mapsto A \cdot B := AB$$

auch eine assoziative Multiplikation zur Verfügung. Diese ist zudem bilinear, denn es gelten die Distributivgesetze und $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$. Eine solche Struktur nennt man eine normierte Algebra bzw. im Fall der Vollständigkeit eine Banach-Algebra, kurz B -Algebra.

Um genauer zu definieren, beschränken wir uns auf ⁽¹⁰⁾
den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und betrachten die rein algebraischen
von den analytischen Aspekten:

Def.: Eine $\mathbb{C}$ -Algebra ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum A , auf
den eine assoziative, bilinear Abbildung

$$\bullet \quad A \times A \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b =: ab$$

definiert ist.

$(A, \cdot)$ heißt kommutativ, wenn $ab = ba$ für alle $a, b \in A$.

Man nennt $I \in A$ ein Einselement von A , wenn
 $Ia = aI = a$ für alle $a \in A$ gilt.

Ein linearer Teilraum $I \neq A$ von A ist $aI \in I$ und
 $Ia \in I$ für alle $a \in A$ heißt ein Ideal in A .

Fest kommt die Norm auf dem Vektorraum A als
ein weiteres Strukturelement hinzu:

Def.: Eine normierte Algebra ist eine $\mathbb{C}$ -Algebra A ,
versehen mit einer Norm $\| \cdot \|$, so dass

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\| \quad \text{für alle } a, b \in A$$

(Submultiplikativität) und $\|I\| = 1$, falls ein
Einselement $I \in A$ existiert.

Eine Banach-Algebra (kurz: B -Algebra) ist eine
vollständige normierte Algebra.

Bezüglich $L(E)$ können wir feststellen:

(10)

Bem.: Sei E ein B -Raum über $\mathbb{C}$. Dann ist $L(E)$, ausgestattet mit der Operatornorm, eine B -Algebra mit der Identität $I: E \rightarrow E$ als Einselement. Falls $\dim E > 1$ ist, ist $L(E)$ nicht kommutativ. Wenn $\dim E = \infty$ gilt, ist $K(E) \subsetneq L(E)$ ein abgeschlossenes Ideal in $L(E)$ (s.o.: "Idealeigenschaft" kompakter Operatoren). $F(E) \subsetneq L(E)$ ist in diesem Fall ebenfalls ein Ideal, allerdings nicht abgeschlossen.

In einer B -Algebra besteht die Möglichkeit, Funktionen (z.B. beschränkter linearer Operatoren) durch Potenzreihen zu definieren.

Satz 3: ES sei A eine B -Algebra mit Einselement, $(a_n)_n$ eine Folge in A und $R = (\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}}) \in (0, \infty]$.

Dann wird durch

$$P: A \supset B_R(0) \rightarrow A, \quad a \mapsto P(a) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k a^k$$

eine stetige Funktion definiert. Für jedes $r \in (0, R)$ konvergiert diese Reihe gleichmäßig auf $\overline{B_r(0)}$.

Bew.: Für $n, u \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq u$ und $a \in \overline{B_r(0)}$ haben wir

$$\left\| \sum_{k=n}^u a_k a^k \right\| \leq \sum_{k=n}^u \|a_k a^k\| \quad (\Delta S\text{-Ungleichung})$$

Nun ist
submultiplikativ
$$\leq \sum_{k=n}^u \|a_k\| \|a\|^k \leq \sum_{k=n}^u \|a_k\| r^k \rightarrow 0 \quad (n, u \rightarrow \infty),$$

letztes, da $r \in (0, R)$ nach Voraussetzung.

Also ist die Partialsummenfolge $(S_n)_n$ mit $S_n = \sum_{k=0}^n a_k a^k$

eine Cauchy-Folge in $\mathcal{A}$ und wegen der Vollständigkeits-(12)
eigenschaft konvergiert. Der Grenzwert sei mit a^* bezeich-
net. Dann haben wir

$$\sup_{a \in \overline{B_r(0)}} \|a^* - \sum_{k=0}^{n-1} a_k a^k\| \leq \sup_{a \in \overline{B_r(0)}} \sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| \|a\|^k \quad (\text{wie oben})$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| r^k \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

und das ist die Aussage über die gleichmäßige Konvergenz.

Zur Stetigkeit: Seien $a, b \in \overline{B_r(0)}$. Dann ist

$$P(a) - P(b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k a^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (a^k - b^k),$$

wobei anstelle der geometrischen Summenformel gilt

$$a^k - b^k = \sum_{\ell=0}^{k-1} a^{k-\ell-1} (a-b) b^{\ell} \quad (\mathcal{A} \text{ ist ggf. nicht abelsch!}).$$

Hieraus folgt

$$\|P(a) - P(b)\| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| \cdot k \cdot r^{k-1}}_{=: L_r < \infty, \text{ da } r < R} \|a-b\| = L_r \|a-b\|$$

D.h. P ist auf $\overline{B_r(0)}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Koe-
ffizient L_r wie oben definiert. □

Bem.: Hier hat man $a_k \in \mathbb{C}$, was als $a_k I \in \mathcal{A}$ aufgefasst
werden kann.

Wt Satz 3 können wir für die Elemente a einer $\mathcal{B}$ -Algebra
 $\mathcal{A}$ die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad a \mapsto \exp(a) := e^a := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

ebenso durch eine Potenzreihe definieren wie für Ma-
trizen oder komplexe Zahlen. Sie hat folgende Eigen-
schaften:

- Satz 4: Es seien A eine B -Algebra mit Einselement 1 , (13)
 $a, b, c \in A$, c invertierbar und $f \in C([-\tau, \tau], A)$. Dann gelten:
- (1) Für $a = c^{-1}bc$ ist $e^a = c^{-1}e^b c$.
 - (2) Wenn $[a, b] = 0$, so ist $e^{a+b} = e^a e^b$. Insbesondere gilt für $s, t \in \mathbb{R}$, dass $e^{(s+t)a} = e^{sa} e^{ta}$.
 - (3) e^a ist invertierbar und es gilt $(e^a)^{-1} = e^{-a}$.
 - (4) Die Abbildung $t \mapsto e^{ta} : \mathbb{R} \rightarrow A$ ist differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dt} e^{ta} = a e^{ta}$ mit Grenzwertbildung in ob. Norm auf A .
 - (5) Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{du}{dt} = au + f, \quad u(0) = u_0 \in A$$

ist in $C^1([-\tau, \tau], A)$ eindeutig bestimmt und gegeben durch

$$u(t) = e^{ta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)a} f(s) ds.$$

Bem. zu (5): Der Bew. von (5) benutzt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für vektorwertige Funktionen. Folgt hier ^{über-} nächster Abschnitt. Eindeutigkeit und Produktregel verschieben wir in die Übungen, das geht tatsächlich wie in Area I.

Bew.: (1) Bei der folgenden Rechnung wird verwendet, (14)
dass die Multiplikationen von rechts und links, also
 $M_r: A \rightarrow A, a \mapsto ac$ und $M_l: A \rightarrow A, a \mapsto ca$ ($c \in A$ fest)
linear und aufgrund der Submultiplikativität der
Normen beschränkt und also stetig sind.

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c^{-1}bc)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} c^{-1} \frac{b^k}{k!} c$$

$$\text{Vorlesung} = c^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} \right) c = c^{-1} e^b c.$$

(2) Aus $0 = [a, b] = ab - ba$ folgt die Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes

$$(a+b)^k = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} a^{k-l} b^l.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{a+b} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (a+b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} a^{k-l} b^l \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{a^{k-l}}{(k-l)!} \frac{b^l}{l!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^l}{l!} \right) = e^a e^b. \end{aligned}$$

Beim vorletzten "=" haben wir das Cauchy-Produkt
von Reihen benutzt, was sich unter den Voraussetzungen
für $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| < \infty$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \|b_k\| < \infty$ ebenso beweisen
lässt wie bei gleichmäßiger Konvergenz. -

Der Zusatz ist eine unmittelbare Folgerung.

$$(3) \quad I = e^0 = e^{a-a} = e^a e^{-a} \Rightarrow e^{-a} = (e^a)^{-1}. \quad (2)$$

(15)

(4) Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq 1$. Dann haben wir

$$\left\| \frac{1}{h} (e^{(t+h)a} - e^{ta}) - a e^{ta} \right\| = \left\| \left\{ \frac{1}{h} (e^{ha} - I) - a \right\} \cdot e^{ta} \right\|$$

$$\leq \left\| \frac{1}{h} (e^{ha} - I) - a \right\| \|e^{ta}\| = \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{k!} h^{k-1} \right\| \|e^{ta}\|$$

$$\leq \|e^{ta}\| \cdot |h| \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|a\|^k}{k!} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

(5) Existenzaussage: Da $e^{ta} \in \mathcal{A}$, die Multiplikationselemente stetig und das Integral ein Grenzwert von Folgen ist ($\rightarrow$ übermäßiger Abschluß), können wir die angegebene Funktion u schreiben als

$$u(t) = e^{ta} \left(u_0 + \int_0^t e^{-sa} f(s) ds \right).$$

Dann ergeben (4) und die Produktregel ($\rightarrow \tilde{u}$)

$$\frac{du}{dt}(t) = a e^{ta} \left(u_0 + \int_0^t e^{-sa} f(s) ds \right) + e^{ta} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{-sa} f(s) ds$$

$$= a u(t) + e^{ta} e^{-ta} f(t) = a u(t) + f(t).$$

Hauptsatz

Die Anfangsbedingung $u(0) = u_0$ ist ebenfalls erfüllt. $\square$

Auch die Potenzreihe spielt in $\mathcal{B}$ -Algebren eine wichtige Rolle, und zwar bei der Untersuchung der Umkehrbarkeit ihrer Elemente. In diesem allgemeinen Rahmen wird sie untersucht in "Neumannsche Reihe", nach Carl Neumann (1832-1925), das ist aber erst diese Randwertprobleme, nicht John v. Neumann!

Lemma 1: Es seien A eine B -Algebra mit Einselement I (16) und $a \in A$, so dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|a^k\|} < 1$. Dann ist $I - a$ invertierbar und es gilt

$$(I - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k.$$

Im Fall $\|a\| < 1$ hat man fuer die Abschätzung

$$\|(I - a)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|a\|}.$$

Bew.: Wir werden später sehen, dass der Grenzwert in der Voraussetzung stets existiert. Diese ist also für $\|a\| < 1$ immer erfüllt.

Bew.: Da $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|a^k\|} < 1$ ist, konvergiert nach dem Wurzelkriterium die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|a^k\|$. Satz 3 bzw. das Argument im gleichen Beweis ergibt die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ in der Norm auf A . Insbesondere ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a^k\| = 0$, und daraus folgt

$$(I - a) \sum_{k=0}^n a^k = I - a^{n+1} \rightarrow I \quad (n \rightarrow \infty),$$

also $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = (I - a)^{-1}$. Im Fall $\|a\| < 1$ hat man fuer

$$\|(I - a)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a\|^k = \frac{1}{1 - \|a\|}. \quad \square$$

Dannst können wir zeigen:

Satz 5: In einer B -Algebra A ist Element I ist die Gruppe G_A der invertierbaren Elemente offen und die Umkehrabb. $a \mapsto a^{-1} : G_A \rightarrow G_A$ stetig.

Bew.: Sei $a \in G_A$ und $b \in A$ mit $\|a-b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Dann ist

$$b = a - (a-b) = a(I - a^{-1}(a-b)),$$

wobei $\|a^{-1}(a-b)\| \leq \|a^{-1}\| \|a-b\| < 1$. Nach Lemma 1 ist $I - a^{-1}(a-b)$ und damit auch b invertierbar. Weiter gilt

$$b^{-1} = (I - a^{-1}(a-b))^{-1} a^{-1},$$

woraus mit der Ungleichung aus Lemma 1 folgt

$$\|b^{-1}\| \leq \|a^{-1}\| \| (I - a^{-1}(a-b))^{-1} \| \leq \frac{\|a^{-1}\|}{1 - \|a^{-1}(a-b)\|},$$

also lim $\|b^{-1}\| = \|a^{-1}\|$, da ja auch $\|a^{-1}\| \leq$
 $b \rightarrow a$

$\|b^{-1}\| \|I - a^{-1}(a-b)\|$. Weiter haben wir

$$a^{-1} - b^{-1} = a^{-1}(I - ab^{-1}) = a^{-1}(b-a)b^{-1}$$

und daher

$$\|a^{-1} - b^{-1}\| \leq \|a^{-1}\| \|b-a\| \|b^{-1}\| \rightarrow 0 \quad (b \rightarrow a).$$

Damit kommen wir zu einigen Begriffen, die in B -Algebren (insbes. $L(E)$) eine natürliche Rolle haben, und die wir später für unbeschränkte Operatoren in naheliegender Weise verallgemeinern können.

Def.: Es seien A eine $\mathbb{B}$ -Algebra mit Einselement I und (18)
 $a \in A$. G_A bezeichne die Gruppe der invertierbaren Elemente.
 Dann heißen

- $S(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - a \in G_A\}$ die Resolventenmenge von a ,
- $R_a : S(a) \rightarrow A, \lambda \mapsto R_a(\lambda) := (\lambda I - a)^{-1}$
 die Resolvente von a und
- $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus S(a)$ das Spektrum von a .

Satz 6 (Eigenschaften der Resolvente): Sei A eine $\mathbb{B}$ -Algebra
 mit Einselement I und $a \in A$. Dann gilt:

(1) Die Resolventenmenge $S(a)$ ist offen und die Resol-
 vente $R_a : S(a) \rightarrow G_A \subset A$ stetig.

(2) Fur $\lambda, \mu \in S(a)$ gilt die Resolventengleichung

$$R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\mu - \lambda) R_a(\lambda) R_a(\mu).$$

(3) R_a ist komplex differenzierbar mit $R_a'(\lambda) = -R_a(\lambda)^2$
 und kann überall lokal in eine Potenzreihe ent-
 wickelt werden.

Bew.: (1) Offenbar ist $f : \mathbb{C} \rightarrow A, \lambda \mapsto f(\lambda) = \lambda I - a$ stetig.

Da $S(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda) \in G_A\} = f^{-1}(G_A)$ und G_A nach Satz 5
 offen in A sind, ist $S(a)$ offen in $\mathbb{C}$.

$$R_a : S(a) \rightarrow G_A, \lambda \mapsto R_a(\lambda) = f(\lambda)^{-1}$$

ist stetig als Verknüpfung von f mit abs nach Satz 5
 ebenfalls stetigen Inversen.

(2) ist (i) leicht nachzurechnen und folgt (ii) später
 modular.

(3) Für $\lambda, \mu \in \sigma(a)$ mit $\lambda \neq \mu$ folgt aus (2)

$$\frac{1}{\lambda - \mu} (R_a(\lambda) - R_a(\mu)) = -R_a(\lambda)R_a(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \lambda} -R_a(\lambda)^2,$$

letzteres aufgrund der Stetigkeit der Resolvente.

Schließlich sei $z_0 \in \sigma(a)$ und $z \in \sigma(a)$ mit $|z - z_0|$ hinreichend klein. Dann ergibt die Neumannsche Reihe für

$$\lambda I - a = (\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - a = (\lambda_0 I - a)(I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - a)^{-1})$$

dass

$$(\lambda I - a)^{-1} = (\lambda_0 I - a)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k (\lambda_0 I - a)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k (\lambda_0 I - a)^{-k-1} \quad \square$$

Fakt berechnen wir zum Spektrum:

Def.: Die Größe $r(a) := \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(a) \}$ heißt der Spektralradius eines Elements a einer B -Algebra A mit Einselement I .

Satz 7: Es seien A wie im Satz 6 und $a \in A$. Dann ist das Spektrum $\sigma(a)$ eine kompakte, nicht leere Teilmenge von $\mathbb{C}$. Für den Spektralradius gilt

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Bew., Teil (I):

(i) Aus Satz 6 (4) folgt die Abgeschlossenheit des Spektrums. Für $|\lambda| > \|a\|$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} a^k = \frac{1}{\lambda} (I - \frac{a}{\lambda})^{-1} = R_a(\lambda)$, woraus $r(a) \leq \|a\|$ und hierbes. die Kompaktheit des Spektrums folgt.

(ii) Um $\sigma(a) \neq \emptyset$ zu zeigen, nehmen wir das Gegenteil an, (20)
 also $\mathcal{S}(a) = \mathbb{C}$, insbesondere $0 \in \mathcal{S}(a)$. Dann existiert
 $R_a(0) = (-a)^{-1} \neq 0$. Nach der Folgerung aus Hahn-Banach
 existiert ein $y \in A'$ mit $y[R_a(0)] \neq 0$. Wir definieren

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) := y[R_a(z)].$$

Nach Satz 6 (3) ist f eine ganze Funktion. Wegen

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R_a(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (zI - a)^{-1} = 0$$

folgt $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ und mit dem Satz von Liouville,
 dass $f \equiv 0$, im Widerspruch zu $f(0) \neq 0$.

(iii) Es seien $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir nehmen an,
 dass $\lambda^n \notin \sigma(a^n)$ ist, also $\lambda^n \in \mathcal{S}(a^n)$ bzw. $\lambda^n I - a^n \in G_A$.

Wegen

$$\lambda^n I - a^n = (\lambda I - a)(a^{n-1} + \lambda a^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1})$$

existiert mit

$$(a^{n-1} + \lambda a^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1})(\lambda^n I - a^n)^{-1}$$

eine Inverse zu $\lambda I - a$, so dass $\lambda \in \mathcal{S}(a)$ bzw. $\lambda \notin \sigma(a)$.

Damit ist gezeigt: $\lambda \in \sigma(a) \Rightarrow \lambda^n \in \sigma(a^n)$. Nach (i)

folgt daraus $|\lambda|^n \leq \|a^n\|$ bzw. $|\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Das gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$r(a) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(a) \} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

(iv) Bleibt z.z., dass

$$r(a) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}, \quad (!)$$

dann folgt $r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$, insbesondere auch die Existenz des Grenzwerts. (Ende Teil (I))

Dazu benötigen wir ein grundlegendes Ergebnis der Funktionalanalysis, das

Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit: Es seien E ein B -Raum, F ein normierter Vektorraum und $M \subset L(E, F)$ mit $\sup \{ \|Ax\|_F : A \in M \} < \infty$ für alle $x \in E$. Dann ist bereits $\sup \{ \|A\|_{E \rightarrow F} : A \in M \} < \infty$.

("Jede punktweise beschränkte Teilmenge von $L(E, F)$ ist beschränkt, wenn E vollständig ist." - S.z.B. Heise/Voigt, Theor. S. 10)

Folgerung: Es sei E ein normierter Vektorraum und $M \subset E$ eine Teilmenge mit $\sup \{ |y[x]| : x \in M \} < \infty$ für alle $y \in E'$. Dann gilt $\sup \{ \|x\|_E : x \in M \} < \infty$.

("Jede schwach beschränkte Teilmenge eines normierten Vektorraums ist (norm-)beschränkt.")

Bew. der Folgerung: Die kanonische Einbettung

$J: E \rightarrow E'', x \mapsto J(x)$, def. durch $J(x)[y] := y[x] \quad \forall y \in E'$

ist eine Isometrie, denn

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup \{ |J(x)[y]| : y \in E', \|y\|_{E'} \leq 1 \}$$

(22)

$$= \sup \{ |y[x]| : \text{---} \text{---} \text{---} \} = \|x\|_E,$$

letzteres aufgrund der Normformel ($\rightarrow$ Hahn-Banach).

Nut $M := J(M)$ liefert dann die Voraussetzung

$$\sup \{ |y[x]| : x \in M \} = \sup \{ |y[x]| : x \in M \} < \infty$$

für alle $y \in E'$. Das "Prinzip...", angewendet in $E'' = L(E', \mathbb{K})$

ergibt

$$\sup \{ \|x\|_E : x \in M \} = \sup \{ \|y\|_{E''} : y \in M \} < \infty. \quad \square$$

Bzw. von Satz 7, Teil (II):

Für $a \in A$ und $y \in A'$ definieren wir die holomorphe

Funktion $f: S(a) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) := y[R_a(z)]$.

Für $|z| > \|a\|$ ist dann wegen $R_a(z) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{a^u}{z^{u+1}}$

$$f(z) = \sum_{u=0}^{\infty} y[a^u] \cdot \frac{1}{z^{u+1}}.$$

Rechts steht die Laurentreihe von f um $z_0 = 0$. Diese konvergiert auf dem gesamten "Kreisring" $\overline{B_{r(a)}(0)}^c$, auf dem f holomorph ist. Also ist für jedes

$$r > r(a) : \sup \{ |y[a^u]| \cdot \frac{1}{r^u} : u \in \mathbb{N} \} < \infty.$$

Bei festem $a \in A$ gilt das für jedes $y \in A'$. Die Folgerung aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ergibt dann:

Für alle $r > r(a)$ ist

(22a)

$$\sup_{u \in \mathbb{N}} \frac{\|a^u\|}{r^u} < \infty$$

bzw.

$$\sup_{u \in \mathbb{N}} \|a^u\|^{\frac{1}{u}} \leq C(r)^{\frac{1}{u}} r.$$

Für $u \rightarrow \infty$:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \|a^u\|^{\frac{1}{u}} \leq r. \text{ Gilt für alle } r > r(a)$$

und damit $\limsup_{u \rightarrow \infty} \|a^u\|^{\frac{1}{u}} \leq r(a)$, wie behauptet. $\square$