

1.3 Unbeschränkte Operatoren in Banachräumen

①

Zunächst seien E und F lediglich als Vektorräume über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ vorausgesetzt, deren wir beginnen mit einigen rein algebraischen Begriffen:

Def.: Ein linearer Operator $A: E \supset D_A \rightarrow F$ ist eine auf einem linearen Teilraum $D_A \subset E$ definierte lineare Abbildung mit Werten in F . D_A heißt der Definitionsbereich und $R(A) := \{Ax \in F: x \in D_A\}$ der Wertebereich von A .

Wertebereich: $D(A)$, $\text{dom}(A)$ oder $\text{dom } A$ anstelle von D_A , dabei steht "dom" für "domain". Statt $R(A)$ findet man auch $\text{im}(A)$, $\text{ran}(A)$ oder $A(D_A)$ (Image, range).

Def.: Es seien $A: E \supset D_A \rightarrow F$ und $B: E \supset D_B \rightarrow F$ lineare Operatoren, so dass

(i) $D_A \subset D_B$ und (ii) $B|_{D_A} = A$, d.h. $Bx = Ax \forall x \in D_A$.

Dann nennt man

- A eine Einschränkung (Restriktion) von B bzw.
- B eine Erweiterung (Fortsetzung) von A .

Schreibweise: $A \subset B$.

Der Graph $G_A = \{(x, Ax) \in E \times F: x \in D_A\}$ eines linearen Operators $A: E \supset D_A \rightarrow F$ ist ein linearer Teilraum von $E \times F$.

Es gilt: $A \subset B \iff G_A \subset G_B$.

Das folgende Lemma klärt, welche Unterräume von $E \times F$ Graphen eines linearen Operators sind:

Lemma 1: Ein linearer Teilraum L von $E \times F$ ist genau dann der Graph eines linearen Operators $A: E \supset D_A \rightarrow F$, wenn $\{(x, y) \in L : x = 0\} = \{(0, 0)\}$ gilt.

Bew.: Ist $L = G_A = \{(x, Ax) \in E \times F : x \in D_A\}$ für einen linearen Operator A und $(0, y) \in L$, so ist $y = A0 = 0$, also $\{(0, y) \in L\} = \{(0, 0)\}$.

Umgekehrt gelte $\{(0, y) \in L\} = \{(0, 0)\}$. Dann ist die kanonische Projektion

$$\pi_E: L \rightarrow E, (x, y) \mapsto \pi_E(x, y) = x$$

injektiv, denn

$$\ker(\pi_E) = \{(x, y) \in L : \pi_E(x, y) = 0\} = \{(0, y) \in L\} = \{(0, 0)\}.$$

Setzt man $D_A := \pi_E(L)$, so ist dies ein linearer Teilraum von E , und $\pi_E: L \rightarrow D_A$ ist bijektiv, besitzt also eine Umkehr $\pi_E^{-1}: D_A \rightarrow L$. Mit

$$\pi_F: L \rightarrow F, (x, y) \mapsto \pi_F(x, y) = y$$

können wir also die lineare Abbildung

$$A: E \supset D_A \rightarrow F, x \mapsto Ax := \pi_F \circ \pi_E^{-1} x$$

definieren. Hierfür gilt

$$\begin{aligned} G_A &= \{(x, \pi_F \circ \pi_E^{-1} x) : x \in \pi_E(L)\} = \{(\pi_E(x, y), \pi_F(x, y)) : (x, y) \in L\} \\ &= \{(x, y) \in L\} = L. \end{aligned}$$

□

Folgerung: Ist $B: E \supset D_B \rightarrow F$ ein linearer Operator und $L \in G_B$ ein linearer Teilraum, so gibt es einen linearen Operator $A \in B$ mit $L = G_A$. ③

Vor jetzt sei setzen wir voraus, dass E und F Banachräume mit Normen $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$ sind. Das kartesische Produkt $E \times F$ wird mit der Norm

$$\|(x, y)\|_{E \times F} := \|x\|_E + \|y\|_F$$

oder einer dazu äquivalenten ausgestattet und ist dann ebenfalls ein B -Raum. Falls es sich bei E und F um Hilberträume mit Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ handelt, ist es vorteilhaft, diese Struktur auf $E \times F$ zu übertragen, indem man

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle_{E \times F} := \langle x, u \rangle_E + \langle y, v \rangle_F$$

festlegt, was zu

$$\|(x, y)\|_{E \times F} = (\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2)^{\frac{1}{2}}$$

führt.

Def.: Sei $A: E \supset D_A \rightarrow F$ ein linearer Operator. Dann heißt A

- (1) dicht definiert, wenn D_A in E dicht ist,
- (2) beschränkt, wenn $\sup \{\|Ax\|_F : x \in D_A \wedge \|x\|_E \leq 1\} < \infty$ ist, andernfalls unbeschränkt.

Bem.: (1) Ist A beschränkt, so ist A wegen der Linearität gleichmäßig stetig und erlaubt eine eindeutige

$$\tilde{A}: E \supset \overline{D_A} \rightarrow E \quad \text{mit} \quad \tilde{A}|_{D_A} = A.$$

Begründung: Sei $x \in \overline{D_A}$ existiert eine Folge $(x_n)_n$ in D_A , so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ bezüglich $\|\cdot\|_E$. Wenn A beschränkt ist, existiert ein $C > 0$, so dass

$$\|Ax_n - Ax_m\|_F = \|A(x_n - x_m)\|_F \leq C \|x_n - x_m\|_E \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist $(Ax_n)_n$ eine Cauchy-Folge in F , und da F vollständig ist, existiert

$$\tilde{A}x := \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$$

und ist unabhängig von der approximierenden Folge $(x_n)_n$. Dieses häufig benutzte Argument ist allgemeiner anwendbar auf gleichmäßig stetige Abbildungen

$$f: (X, d_X) \supset D_f \longrightarrow (Y, d_Y)$$

von einer Teilmenge D_f eines metrischen Raumes (X, d_X) in einen vollständigen metrischen Raum (Y, d_Y) . Es wird weiter als "Prinzip der gleichmäßig stetigen Fortsetzung" bezeichnet.

(2) Ist $A: E \supset D_A \rightarrow F$ dicht definiert und beschränkt, so ist die Fortsetzung $\tilde{A} \in L(E, F)$ und wird oft ebenfalls mit A bezeichnet (oder man nimmt o. F. an, dass A nicht nur dicht, sondern überall definiert ist).

Def.: Ein linearer Operator $A: E \supset D_A \rightarrow F$ heißt abgeschlossen, (5)
wenn G_A in $E \times F$ abgeschlossen ist.

Die Abgeschlossenheit eines unbeschränkten Operators ist eine wichtige Eigenschaft, die in vielen Beweisen die fehlende Stetigkeit ersetzt. Daher einige erläuternde

Bem.: (1) Folgekriterium: $A: E \supset D_A \rightarrow F$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ in D_A für die die Grenzwerte

$$x := E\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in E \quad \text{und} \quad y := F\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \in F$$

existieren, gilt, dass $x \in D_A$ und $y = Ax$.

Begründung: Die angegebene Bedingung bedeutet gerade, dass für jede Folge $((x_n, Ax_n))_n$ in G_A , die in $E \times F$ gegen ein $(x, y) \in E \times F$ konvergiert, $(x, y) \in G_A$ gilt. Das ist die Abgeschlossenheit von G_A in $E \times F$.

(2) Eine weitere Charakterisierung der Abgeschlossenheit kann mit Hilfe der sogenannten "Graphennorm"

$$\|x\|_{D_A} := \|x\|_E + \|Ax\|_F$$

(oder äquivalenten) auf D_A gegeben werden:

Genau dann ist $A: E \supset D_A \rightarrow F$ abgeschlossen, wenn

$(D_A, \|\cdot\|_{D_A})$ vollständig ist. (Beweis als Übungsaufgabe.)

(3) Ist $A \in L(E, F)$, so ist A abgeschlossen, wie man aus dem Folgerungssatz aus Bem. (1) leicht einsieht. Umgekehrt gilt der "Satz vom abgeschlossenen Graphen" (engl.: "Closed Graph Theorem"), ein tiefstgelegendes Ergebnis der "Einführung in die Funktionalanalysis": Ist $A: E \rightarrow F$ abgeschlossen, so ist bereits $A \in L(E, F)$. Entscheidend hierbei ist, dass

- E und F beide vollständig sind und
- A auf ganz E definiert ist.

Dieser Satz gilt sogar allgemeiner in dem Fall, dass E und F vollständige metrische Vektorräume sind. (S. z.B.: Meise/Vogt, Satz 8.8, oder Werner, Thm. IV.4.5)

Def.: Ein linearer Operator $A: E \supset D_A \rightarrow F$ heißt abschließbar, wenn $\overline{G_A}$ der Graph eines linearen Operators $B: E \supset D_B \rightarrow F$ ist. Man nennt dann B die Abschließung von A und schreibt $\overline{A}$ statt B .

Lemma 2: Sei $A: E \supset D_A \rightarrow F$ ein linearer Operator. Dann gilt:

- (1) Ist A abschließbar, so ist $\overline{A}$ abgeschlossen und $A \subset \overline{A}$; $A \subset B$ impliziert $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- (2) A ist abschließbar genau dann, wenn A eine abgeschlossene Erweiterung $\tilde{A}$ besitzt.

(3) A ist genau dann abschließbar, wenn für jede Nullfolge $(x_n)_n$ in D_A , für die in F der Grenzwert $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$ existiert, gilt, dass $y = 0$ ist. (7)

(4) Für eine abgeschlossene Erweiterung $\tilde{A}$ von A ist $\tilde{A} = \overline{A}$ genau dann, wenn D_A in $(D_{\tilde{A}}, \| \cdot \|_{D_{\tilde{A}}})$ dicht liegt.

Bew.: (1) folgt unmittelbar aus der Definition und liefert die Implikationen " $\Rightarrow$ " in (2). Für " $\Leftarrow$ " sei $A \subset \tilde{A} = \overline{A}$. Dann ist

$$G_A \subset \overline{G_A} \subset \overline{G_{\tilde{A}}} = G_{\tilde{A}}.$$

Also ist $\overline{G_A}$ ein linearer Teilraum eines Graphen.

Daher gilt

$$\{(x, y) \in \overline{G_A} : x = 0\} \subset \{(x, y) \in G_{\tilde{A}} : x = 0\} \stackrel{\text{Lemma 1}}{=} \{(0, 0)\}.$$

Lemma 1 ergibt dann auch, dass $\overline{G_A}$ der Graph eines linearen Operators ist.

(3) Sei A abschließbar und $(x_n)_n$ eine Nullfolge in D_A , für die $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y \in F$ existiert. Dann ist $((x_n, Ax_n))_n$ eine Folge in G_A , die gegen $(0, y) \in \overline{G_A} = G_{\tilde{A}}$ konvergiert. Lemma 1 ergibt $y = 0$.

Umgekehrt gelte für alle Nullfolgen $(x_n)_n$ in D_A , für die $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \in F$ existiert, dass $y = 0$. Ist dann $(0, y) \in \overline{G_A}$, so existiert eine Folge $((x_n, Ax_n))_n$ in G_A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, Ax_n) = (0, y)$,

woraus $y=0$ folgt. Also ist $\{(x,y) \in \bar{G}_A : x=0\} = \{(0,0)\}$,
 und nach Lemma 1 ist $\bar{G}_A$ der Graph eines linearen
 Operators. (3)

(4) Die Abbildung $J_{\tilde{A}}: (D_{\tilde{A}}, \| \cdot \|_{D_{\tilde{A}}}) \rightarrow (G_{\tilde{A}}, \| \cdot \|_{E \times F})$,
 $x \mapsto J_{\tilde{A}} x := (x, \tilde{A}x)$ ist eine lineare und isometri-
 sche Bijektion, die $D_{\tilde{A}}$ auf $G_{\tilde{A}}$ abbildet. Daher ist

$$D_A \text{ dicht} \iff (D_{\tilde{A}}, \| \cdot \|_{D_{\tilde{A}}}) \hookrightarrow G_A \text{ dicht} \iff (G_{\tilde{A}}, \| \cdot \|_{E \times F})$$

$$\iff \bar{G}_A = G_{\tilde{A}} \iff \bar{A} = \tilde{A}. \quad \square$$

Nun betrachten wir die Betrachtung eine auf lineare Operato-
 ren $A: E \supset D_A \rightarrow E$, für die Definitionsbereich und Wertebereich in
denselben B -Raum E liegen. Ebenso wie zuvor für die Ele-
 mente eines B -Algebra werden für solche Operatoren die
 Begriffe "Resolvente", "Resolventenmenge" und "Spektrum"
 eingeführt. Sie spielen eine wichtige Rolle, wenn es um
 die Frage geht, für welche unbeschränkten Operatoren A
 eine Schar von Evolutionsoperatoren vergleichbar mit
 $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$ existiert.

Def.: Es sei $A: E \supset D_A \rightarrow E$ ein dicht definierter linearer
 Operator. Dann heißen

(1) $S(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A: D_A \rightarrow E \text{ ist bijektiv und } (\lambda I - A)^{-1} \in L(E)\}$
 die Resolventenmenge,

(2) $R_A: S(A) \rightarrow L(E)$, $\lambda \mapsto R_A(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1}$ die Resolvente ⑨
(oder Resolventeabbildung),

(3) $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus S(A)$ das Spektrum

von A . Man unterscheidet die folgenden Teilmengen
des Spektrums:

(3.1) $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda I - A \text{ ist nicht injektiv}\}$
 $= \{\text{Eigenwerte von } A\}$, das Punktspektrum,

(3.2) $\sigma_c(A) := \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda I - A \text{ ist injektiv, nicht sur-
jektiv, mit dichtem Bild}\}$, das Stetigkeitsspek-
trum, und

(3.3) $\sigma_r(A) := \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda I - A \text{ ist injektiv und
hat kein dichtes Bild}\}$, das Restspektrum
von A .

Lemma 3: Es sei $A: E \supset D_A \rightarrow E$ dicht definiert. Dann gelten:

(1) Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\lambda I - A: (D_A, \|\cdot\|_{D_A}) \rightarrow (E, \|\cdot\|_E)$ stetig.

(2) Ist $\lambda \in S(A)$, so ist $\lambda I - A: (D_A, \|\cdot\|_{D_A}) \rightarrow (E, \|\cdot\|_E)$
ein Isomorphismus normierter Vektorräume, d.h.
 $\lambda I - A$ ist linear, bijektiv und stetig mit stetiger
Umkehr.

Bew.: (1) Für $x \in D_A$ haben wir

$$\|(\lambda I - A)x\|_E \leq |\lambda| \|x\|_E + \|Ax\|_E \leq \max(|\lambda|, 1) \|x\|_{D_A}.$$

(2) Da $\lambda \in \mathcal{S}(A)$ vorausgesetzt ist, existiert eine Konstante $C_\lambda \geq 0$, so dass

(70)

$$\|(\lambda I - A)^{-1}y\|_E \leq C_\lambda \|y\|_E \quad \forall y \in E.$$

Betrachten wir ferner $A = (A - \lambda I) + \lambda I$, so erhalten wir

$$\|(\lambda I - A)^{-1}y\|_{D_A} = \|(\lambda I - A)^{-1}y\|_E + \|A(\lambda I - A)^{-1}y\|_E$$

$$\leq (1 + |\lambda|) \|(\lambda I - A)^{-1}y\|_E + \|y\|_E \leq (C_\lambda (1 + |\lambda|) + 1) \|y\|_E. \quad \square$$

Folgerung 1: Ist $\mathcal{S}(A) \neq \emptyset$, so ist A abgeschlossen.

Bew.: Ist $\mathcal{S}(A) \neq \emptyset$, so existiert nach Lemma 3 (2) ein Isomorphismus zwischen dem normierten Vektorraum $(D_A, \|\cdot\|_{D_A})$ und dem $\mathcal{B}$ -Raum $(E, \|\cdot\|_E)$. Daher ist $(D_A, \|\cdot\|_{D_A})$ ebenfalls vollständig und damit A abgeschlossen.

Ist A nicht abgeschlossen, so ist also $\mathcal{S}(A) = \emptyset$, und Untersuchungen des Spektrums machen wenig Sinn. Dirk Werner schreibt in seinem Lehrbuch: "Deshalb sollte man das Spektrum nur für abgeschlossene Operatoren studieren." Um solche Untersuchungen ein wenig zu vereinfachen, greifen wir erneut auf einen tiefstgelegenden Satz aus der "Einführung in die Funktionalanalysis" zurück:

Banachscher Isomorphiesatz: Sind X und Y vollständige (11)
metrische Vektorräume und $A: X \rightarrow Y$ stetig, linear und
bijektiv, so ist auch $A^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig.

(Ref.: Heise/Vogt, Satz 8.6)

Daraus ergibt sich eine weitere Folgerung aus Lemma 3:

Folgerung 2: Es sei $A: E \supset D_A \rightarrow E$ abgeschlossen. Dann gelten:

(1) Wenn für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ die Abbildung $\lambda I - A: D_A \rightarrow E$ bijektiv
ist, so gilt bereits $\lambda \in \mathcal{S}(A)$.

(2) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}_p(A) \cup \mathcal{S}_c(A) \cup \mathcal{S}_r(A)$.

Bew.: (1) Nach Lemma 3 (1) ist $\lambda I - A: (D_A, \|\cdot\|_{D_A}) \rightarrow (E, \|\cdot\|_E)$
stetig, nach Voraussetzung bijektiv. Der Isomorphie-
satz ergibt die Stetigkeit der Umkehrabbildung

$$(\lambda I - A)^{-1}: (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (D_A, \|\cdot\|_{D_A}).$$

Da $(D_A, \|\cdot\|_{D_A})$ stetig in $(E, \|\cdot\|_E)$ eingebettet ist, ist
auch $(\lambda I - A)^{-1} \in L(E)$ und damit $\lambda \in \mathcal{S}(A)$.

(2) Nach (1) ist die Möglichkeit einer unstetigen Um-
kehrabbildung $(\lambda I - A)^{-1}$ ausgeschlossen.

Die Aussagen über das Spektrum der Elemente einer B -
Algebra, die wir im letzten Abschnitt kennen gelernt
haben, gelten für unbeschränkte Operatoren unter Vor-
behalte. So ist z. B. das Spektrum eines unbeschränkten
Operators im Allgemeinen nicht beschränkt, aber auch
 $\mathcal{S}(A) = \emptyset$ ist möglich (vgl. Werner, Bsp. (f) nach Satz VII.2.
15). Folgendes gilt jedoch ebenso wie für beschränkte
Operatoren:

Satz 1: Sei $A: E \rightarrow E$ linear, dicht definiert und abgeschlossen. Dann ist $S(A)$ offen und die Resolventenabbildung

$$R_A: S(A) \rightarrow L(E), \lambda \mapsto R_A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$$

um jeden Punkt $\lambda_0 \in S(A)$ in eine Potenzreihe mit Koeffizienten in $L(E)$ entwickelbar und damit holomorph. Für $\lambda, \mu \in S(A)$ gelten die Resolventengleichung

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\mu - \lambda) R_A(\lambda) R_A(\mu)$$

und $R_A'(\lambda) = -R_A(\lambda)^2$. $S(A)$ ist abgeschlossen.

Bew.: Für $\lambda_0 \in S(A)$ setzen wir

$$S(\lambda) := R_A(\lambda_0) \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R_A(\lambda_0)^k.$$

Die Reihe konvergiert bezüglich der Operatornorm in $B_r(\lambda_0)$, wobei $r = \|R_A(\lambda_0)\|^{-1}$. In diesem Kreis ist $S: B_r(\lambda_0) \rightarrow L(E)$, $\lambda \mapsto S(\lambda)$ holomorph. Multiplikation mit $\lambda I - A$ ergibt

$$\begin{aligned} (\lambda I - A) S(\lambda) &= (\lambda - \lambda_0) S(\lambda) + (\lambda_0 I - A) S(\lambda) \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^{k+1} R_A(\lambda_0)^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R_A(\lambda_0)^k = I. \end{aligned}$$

Also ist $S(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = R_A(\lambda)$ und $B_r(\lambda_0) \subset S(A)$.

Sind $\lambda, \mu \in S(A)$, so haben wir

$$\begin{aligned} R_A(\lambda) &= R_A(\lambda) (\mu I - A) R_A(\mu) \\ &= R_A(\lambda) (\mu - \lambda) I + (\lambda I - A) R_A(\mu) \\ &= (\mu - \lambda) R_A(\lambda) R_A(\mu) + R_A(\mu); \end{aligned}$$

das ist die Resolventengleichung. Division durch $\lambda - \mu$ und Grenzübergang ergeben $R_A'(\lambda) = -R_A(\lambda)^2$. $\square$

Für die Vorlesung, in einem kleinen Abschnitt über unbeschränkte Operatoren
ein Beweismittel: Multiplikator auf $L^p(1)$

Bsp. (Multiplikatoren auf $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$): Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein
 σ -endlicher Maßraum, $1 \leq p < \infty$, $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $u: X \rightarrow \mathbb{C}$
eine $\mathcal{A}$ -messbare Funktion sowie

$M: L^p \supset \mathcal{D}_M \rightarrow L^p, f \mapsto Mf$, definiert durch $Mf(x) = u(x)f(x)$
mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_M = \{f \in L^p: Mf \in L^p\}$. In dieser
Situatione heißt

$$R_{\text{ess}}(u) := \{\lambda \in \mathbb{C}: \forall \varepsilon > 0 \mu(\{x \in X: |u(x) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0\}$$

der wesentliche Wertebereich von u bezüglich μ . Für den
Multiplikationsoperator M gelten die folgenden Aussagen:

- (1) M ist dicht definiert und abgeschlossen.
- (2) $M \in L(L^p) \Leftrightarrow u \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ und es ist
 $\|M\|_{p \rightarrow p} = \|u\|_\infty$.
- (3) $\sigma(M) = R_{\text{ess}}(u)$.
- (4) $\lambda \in \sigma_p(M) \Leftrightarrow \mu(\{x \in X: u(x) = \lambda\}) > 0$.
- (5) $\sigma_c(M) = \sigma(M) \setminus \sigma_p(M)$, d.h. $\sigma_r(M) = \emptyset$.

Bew.: (1) Zuerst zeigen wir, dass $\mathcal{D}_M$ in L^p dicht ist. Dazu zer-

legen wir $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ mit $X_n := \{x \in X: |u(x)| \leq n\}$. Ist

dann $f \in L^p$ und $f_n := f \cdot \chi_{X_n}$, so gelten

$$(i) |u f_n| \leq n \cdot |f_n| \leq n |f| \Rightarrow f_n \in \mathcal{D}_M$$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ μ -f.ä. und $\|f - f_n\|^p \leq \|f\|^p$, so
dass nach Lebesgue

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$ gilt.

Aus (i) und (iii) folgt $D_M \subset L^p$, wie behauptet. Multipliziere L^p (2)

Um die Abgeschlossenheit von M einzusehen, seien $f, g \in L^p$ und eine Folge (f_n) in D_M gegeben mit

$$L^p\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{und} \quad L^p\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} M f_n = g.$$

Wie aus dem Beweis des Satzes von Fischer-Riesz hervorgeht, existiert dann eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} M f_{n_k}(x) = g(x)$$

für μ -fast alle $x \in X$. Hieraus folgt, dass $f = g$.

$$g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} M f_{n_k}(x) = M f(x),$$

also $M f = g \in L^p$ und damit $f \in D_M$ und $M f = g$.

(2) Sei $M \in L(L^p)$ mit Operatornorm $\|M\|_{p \rightarrow p}$. Für $\varepsilon > 0$

definieren wir $A_\varepsilon := \{x \in X : |Mx| \geq \|M\|_{p \rightarrow p} + \varepsilon\}$ und

nehmen $\mu(A_\varepsilon) > 0$ an. Aufgrund der Voraussetzung

der σ -Endlichkeit existiert dann eine Teilmenge $B_\varepsilon \subset A_\varepsilon$

mit $B_\varepsilon \in \mathcal{A}$ und $0 < \mu(B_\varepsilon) < \mu(A_\varepsilon)$. Hierfür gilt dann

$$\text{einerseits} \quad \|M \chi_{B_\varepsilon}\|_p \leq \|M\|_{p \rightarrow p} \|\chi_{B_\varepsilon}\|_p = \|M\|_{p \rightarrow p} \mu(B_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{und andererseits} \quad \|M \chi_{B_\varepsilon}\|_p = \left(\int_{B_\varepsilon} |M|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$(\|M\|_{p \rightarrow p} + \varepsilon) \mu(B_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}. \text{ Nach Division durch } \mu(B_\varepsilon)^{\frac{1}{p}} > 0$$

$$\text{also} \quad \|M\|_{p \rightarrow p} + \varepsilon \leq \|M\|_{p \rightarrow p} \text{ ein Widerspruch zu } \varepsilon > 0.$$

Also ist $\mu(A_\varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$ und damit

$$|Mx| \leq \|M\|_{p \rightarrow p} \quad \mu\text{-f.ü.}, \text{ d.h. } \|M\|_\infty \leq \|M\|_{p \rightarrow p}, \text{ wobei}$$

die Implikation " $\Rightarrow$ " gezeigt ist. Für " $\Leftarrow$ " ist

hier zu beachten, dass

Multipliziere L^p (3)

$\|Mf\|_p \leq \|u\|_\infty \|f\|_p$ und damit auch $\|M\|_{p \rightarrow p} \leq \|u\|_\infty$ ist.

(3) Wir zeigen zuerst die Inklusion $\sigma(M) \subset \text{Ress}(u)$, d.h. die Implikation $\lambda \in \sigma(M) \Rightarrow \lambda \in \text{Ress}(u)$. Dazu sei $\lambda \notin \text{Ress}(u)$. Dannes gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass

$$\mu(\{x \in X : |u(x) - \lambda| < \varepsilon_0\}) = 0,$$

d.h. es ist $|u(x) - \lambda| \geq \varepsilon_0$ μ -f.ü. bzw. $\frac{1}{|u(x) - \lambda|} \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$

Dannes ist μ -f.ü. Nach (2) ~~ist~~ der Multiplikator

$$M_\lambda : L^p \rightarrow L^p, f \mapsto M_\lambda f \text{ mit } M_\lambda f(x) = \frac{1}{\lambda - u(x)} \cdot f(x)$$

ein beschränkter linearer Operator auf L^p . Hierfür gilt

$$(\lambda I - M) M_\lambda = I, \text{ so dass } \lambda \in \sigma(M) \text{ bzw. } \lambda \notin \sigma(M)$$

Umgekehrt folgt aus $\lambda \in \text{Ress}(u)$, dass die Abbildung

$$x \mapsto \frac{1}{u(x) - \lambda}, \quad x \rightarrow \mathbb{C}$$

nicht in $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ liegt und damit $M_\lambda \notin L(L^p)$.

Nun ist aber $(\lambda I - M)f = g$ genau dann, wenn

$$f(x) = \frac{1}{\lambda - u(x)} g(x) \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in X,$$

d.h. M_λ ist der einzige Kandidat für $(\lambda I - M)^{-1}$. Folglich existiert keine rechte Inverse ~~für~~ von $\lambda I - M$ und damit ist $\lambda \in \sigma(M)$.

(4) Sei $\lambda \in \sigma_p(M)$. Dannes existiert ein $f \in L^p \setminus \{0\}$, so dass

$$u(x) f(x) = \lambda f(x), \quad \mu\text{-f.ü. Wegen } f \neq 0 \text{ ist}$$

$$\mu(\{x \in X : u(x) \neq \lambda \wedge f(x) \neq 0\})$$

Multiplizieren L^p (4)

$$= \mu(\{x \in X : u(x) = \lambda \wedge f(x) \neq 0\}) > 0$$

und damit auch $\mu(\{x \in X : u(x) = \lambda\}) > 0$.

Umgekehrt: Wenn $\mu(\{x \in X : u(x) = \lambda\}) > 0$ gilt, so ist mit

$\chi_{\{x \in X : u(x) = \lambda\}}$ ein Eigenvektor von M gegeben.

(5) Sei $\lambda \notin \sigma_p(M)$. Dann gilt nach (4)

$$0 = \mu(\{x \in X : u(x) = \lambda\})$$

$$= \int \chi_{\{y \in X : u(y) = \lambda\}}(x) d\mu(x)$$

$$= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{\{y \in X : |u(y) - \lambda| < \frac{1}{n}\}}(x) d\mu(x).$$

Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{\{y \in X : |u(y) - \lambda| < \frac{1}{n}\}}(x) = 0 \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in X$$

$$\text{bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{\{x \in X : |u(x) - \lambda| \geq \frac{1}{n}\}} = 1 \text{ } \mu\text{-fast überall.}$$

Sei nun $g \in L^p$ vorgelegt. Wir definieren

$$g_n(x) = g(x) \cdot \chi_{\{y \in X : |u(y) - \lambda| \geq \frac{1}{n}\}}(x).$$

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ für μ -fast alle $x \in X$ nach

der Vorüberlegung. Ferner ist $\|g_n - g\|^p \leq \|g\|^p$, so dass nach

Lebesgue auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_p = 0$. Weiter sei $f_n(x) = \frac{g_n(x)}{\lambda - u(x)}$

Dann ist $|f_n(x)| \leq n |g_n(x)| \leq n |g(x)|$, also $f_n \in L^p$. Da

$(\lambda I - M)f_n = g_n \in L^p$, folgt $Mf_n \in L^p$ und $f_n \in \mathcal{D}_M$ sowie

$g_n \in \mathcal{R}(\lambda I - M)$. $\mathcal{R}(\lambda I - M)$ ist also dicht in L^p . Für

$\lambda \in \sigma(M) \setminus \sigma_p(M)$ bedeutet das $\lambda \in \sigma_c(M)$.