2.3 Der Satz von Lumer-Phillips

Vom theoretischen Standpunkt aus ist der Satz von Hille-Yosida höchst zufriedenstellend, insofern er die Frage

unter welchen Voraussetzung erzeugt ein linearer Operator auf einem B-Raum eine C^0-Halbgruppe ?

vollständig beantwortet. In der "Praxis" ist dieser Satz jedoch oft etwas umständlich zu handhaben, da man zur Überprüfung der Voraussetzung

$$\| \lambda(\lambda-A)^{-1} \| \leq 1 \qquad \forall \lambda > 0$$

die Resolvente $(\lambda-A)^{-1}$ bereits einigermaßen explizit kennen sollte. Ein in vielen Fällen praktikableres Kriterium liefert der Satz von Lumer-Phillips, der in diesem Abschnitt diskutiert werden soll.

<u>Def.</u>: Es sei E ein B-Raum.

(a) Für $x \in E$ heißt $J(x) := \{ y \in E' : \|y\|_{E'}^2 = \|x\|_E^2 = y[x] \}$ $\subset E'$ das <u>Subdifferential</u> von x.

(b) Ein linearer Operator $A : E \supset D_A \to E$ heißt <u>dissipativ</u>, falls für jedes $x \in D_A$ ein $y \in J(x)$ existiert, so dass $\mathrm{Re}\, y[Ax] \leq 0$ gilt.

(c) $A: E \supset D_A \to E$ heißt <u>akkretiv</u>, falls $-A$ dissipativ ist.

Bem. und Bspe.:

(1) $\forall x \in E$ ist $J(x) \neq \emptyset$. Für $x = 0$ ist $y = 0 \in J(x)$. Für $x \in E \setminus \{0\}$ gibt es nach der Normformel (Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach, 1. Exk., S. 23) ein $y \in E'$ mit $\|y\|_{E'} = 1$ und $y[x] = \|x\|_E$. Setzt man $\tilde{y} := \|x\| \cdot y$, hat man $\tilde{y}[x] = \|x\|_E^2 = \|\tilde{y}\|_{E'}^2$, also $\tilde{y} \in J(x)$.

(2) Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \, , \, \rangle$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es zu jedem $y \in H'$ genau ein $y_0 \in H$, so dass

$$y[x] = \langle y_0, x \rangle \quad \forall x \in H$$

gilt, und für dieses $y_0 \in H$ ist $\|y_0\|_H = \|y\|$.

Nun sei $x \in H$ und $J(x)$ das Subdifferential von x, also

$$J(x) = \{ y \in H' : \|y\|^2 = \|x\|^2 = y[x] \}$$

$$\text{Riesz} \to = \{ \langle y_0, \cdot \rangle : \underbrace{\|y_0\|^2 = \|x\|^2 = \langle y_0, x \rangle}_{} \}.$$

Für ein solches y_0 haben wir dann

$$\|y_0 - x\|^2 = \|y_0\|^2 - 2 \underbrace{\langle y_0, x \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \|x\|^2 = 0,$$

also $y_0 = x$ und damit $J(x) = \{\langle x, \cdot \rangle\}$, was man oft unter Identifizierung von H und H' in der Form $J(x) = \{x\}$ schreibt. Ein Operator A auf einem Hilbertraum ist also genau dann dissipativ, wenn $\operatorname{Re} \langle x, Ax \rangle \leq 0 \quad \forall x \in D_A$ gilt.

(3) Es sei $1 < p < \infty$ und $E = L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ für einen beliebigen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Auch in diesem Fall ist für jedes $f \in E$ das Subdifferential $J(f)$ einelementig und enthält genau das Funktional

$$y[h] = \|f\|_p^{2-p} \int_{\{f \neq 0\}} h \cdot \bar{f} \, |f|^{p-2} \, d\mu .$$

Begründung: Setzt man f für h ein, sieht man

$$y[f] = \|f\|_p^2 .$$

Es ist $y[h] = \int h \, g \, d\mu$ mit $g = \begin{cases} \|f\|_p^{2-p} \bar{f} \, |f|^{p-2} \\ 0 \ , \text{ falls } f(x) = 0 \end{cases}$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz für L^p-Räume hat jedes $y \in (L^p)'$ diese Gestalt(*) und es gilt

$$\|y\| = \|g\|_{p'} \underset{\text{hier}}{=} \|f\|_p \, \|f\|_p^{1-p} \left(\int |f|^{(p-1)p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \|f\|_p \, \|f\|_p^{1-p} \, \|f\|_p^{\frac{p}{p'}} = \|f\|_p .$$

(*) mit einem $g \in L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. $\leadsto \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p'} = \frac{1}{p}$

Also gehört das angegebene y zu $J(f)$.

Nun impliziert die Bedingung $\|y\|_{E'}^2 = \|f\|_E^2 = y[f]$ in unserem Fall $\|g\|_{p'}^2 = \|f\|_p^2 = \int fg \, d\mu$, insbes.

$\int fg \, d\mu = \|f\|_p \|g\|_{p'}$, also Gleichheit in der Hölderschen Ungleichung und $f \cdot g \geq 0$. Dies impliziert $|g| = c|f|^{p-1}$ und $\frac{f}{|f|} = \frac{\overline{g}}{|g|}$. (**)

Hieraus folgt, dass es kein weiteres g mit den geforderten Eigenschaften gibt. Die Bedingung für die Dissipativität von $A : L^p \supset D_A \to L^p$ lautet also hier:

$$\operatorname{Re} \int_{\{f \neq 0\}} \overline{f} \, |f|^{p-2} A f \, d\mu \leq 0 .$$

(4) $J(x)$ ist i.d. Regel tatsächlich mehrelementig. Ist z.B. $E = C([0,1])$ und $f(x) = 1 \ \forall x \in [0,1]$ so gilt für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $([0,1], \mathcal{B})$, dass

$$1 = \int f \, dP = \|f\|_\infty^2 = \|P\|_{\mathcal{M}}^2 ,$$

wobei $\mathcal{M}$ der B-Raum aller komplexen Radonmaße auf $([0,1], \mathcal{B})$ und isomorph zu $(C([0,1]))'$ ist. Also ist jedes $P \in J(f)$.

(**) Nachzulesen in Lieb & Loss, Analysis, Abschnitt 2.3.

<u>Lemma 1</u>: Sei E ein B-Raum und $A: E \supset D_A \to E$ dissipativ.

Dann gilt für alle $\lambda > 0$ und $x \in D_A$

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|.$$

Insbesondere ist $\lambda - A: D_A \to E$ injektiv für $\lambda > 0$.

<u>Bew.</u>: Wir können o.E. $\|x\| = 1$ annehmen. Wir wählen $y_0 \in J(x)$, so dass $y_0[x] = \|x\|^2 = \|y_0\|_{E'}^2 = 1$, und Re $y_0[Ax] \leq 0$. Dann ist

$$\|(\lambda - A)x\| = \sup_{\substack{y \in E' \\ \|y\|_{E'} \leq 1}} |y[(\lambda - A)x]| \geq |y_0[\lambda x - Ax]|$$

$$= |\lambda \underbrace{y_0[x]}_{=1} - y_0[Ax]| \geq \mathrm{Re}\,(\lambda - y_0[Ax])$$

$$= \lambda - \mathrm{Re}\, y_0[Ax] \geq \lambda.$$

<u>Lemma 2</u>: Für einen dissipativen Operator $A: E \supset D_A \to E$ auf einem B-Raum E sind äquivalent:

(1) Es gibt ein $\lambda_0 > 0$, so dass $\lambda_0 - A: D_A \to E$ surjektiv ist.

(2) Für alle $\lambda > 0$ ist $\lambda - A: D_A \to E$ surjektiv.

In diesem Fall ist $(0, \infty) \subset \varrho(A)$.

<u>Bew.</u> des Zusatzes: Zusammen mit Lemma 1 folgt aus (2), dass $\lambda - A: D_A \to E$ für alle $\lambda > 0$ bijektiv ist. Setzt man in der Ungleichung in Lemma 1 $x = (\lambda - A)^{-1} y$, so folgt $\|(\lambda - A)^{-1} y\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y\| \quad \forall y \in E$, und das ist die Stetigkeit der Resolvente.

Bew. der Implikation (1) ⟹ (2)'

Ersetzen wir in (1) bzw. (2) λ_0 durch $\frac{1}{\lambda_0}$ bzw. λ durch $\frac{1}{\lambda}$, können wir diese Aussagen umschreiben zu

(1) $\exists\, \lambda_0 > 0$, so dass $\forall\, y \in E$ die Gleichung $x - \lambda_0 A x = y$ eine Lösung $x \in D_A$ hat. bzw.

(2) $\forall\, \lambda > 0$, $y \in E$ hat die Gleichung

$$x - \lambda A x = y \qquad (*)$$

eine Lösung $x \in D_A$.

Nun gelte (1) und (*) ist äquivalent zu $\left(\cdot\ \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} x - \lambda_0 A x = \frac{\lambda_0}{\lambda} y \iff x - \lambda_0 A x = \frac{\lambda_0}{\lambda} y + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) x$$

$$\iff x = (I - \lambda_0 A)^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} y + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) x\right) =: F(x).$$

Nun ist für $x, x' \in E$

$$\| F(x) - F(x') \| = \| (I - \lambda_0 A)^{-1} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)(x - x') \|$$

$$\leq \underbrace{\| (I - \lambda_0 A)^{-1} \|}_{\leq 1,\ \text{nach Lemma 1}} \left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| \, \| x - x' \| .$$

Nun ist für $\lambda_0 < 2\lambda$, also für $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$, der Vorfaktor $\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$ und somit $F : (E, \|\ \|) \to (E, \|\ \|)$ eine Kontraktion. Der Banachsche Fixpunktsatz ergibt die Existenz einer Lösung x von (*). Da $F : E \to D_A$ abbildet, gilt $x \in D_A$.

Das zeigt (2) unter der Voraussetzung $\lambda \in \left(\frac{\lambda_0}{2}, \infty\right)$.

Durch Iteration können wir (2) für $\lambda \in (\frac{\lambda_0}{2^n}, \infty)$ und damit für jedes $\lambda > 0$ erreichen. $\square$.

Def.: Ein dissipativer Operator $A: E \supset D_A \to E$ auf einem $\mathcal{B}$-Raum E, der den äquivalenten Aussagen (1) bzw (2) aus Lemma 2 genügt, wird als maximal dissipativ bzw. kurz als m-dissipativ bezeichnet. Entsprechend heißt $A: E \supset D_A \to E$ maximal (bzw. m-) akkretiv, wenn $-A$ m-dissipativ ist.

Feststellung: Ist $A: E \supset D_A \to E$ dicht definiert und m-dissipativ, so gilt nach Lemma 2 $(0,\infty) \subset \varrho(A)$ und nach Lemma 1 $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1 \quad \forall \lambda > 0$. Nach dem Satz von Hille-Yosida erzeugt also A eine Kontraktionshalbgruppe.

Mit dem nächsten Lemma soll die Äquivalenz gezeigt werden:

Lemma 3. Es sei $A: E \supset D_A \to E$ ein linearer Operator mit $(0,\infty) \subset \varrho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1$ für alle $\lambda > 0$. Dann ist A m-dissipativ.

Bew.: Wir zeigen zuerst, dass A dissipativ ist. Dazu sei $x \in D_A$ und $y \in J(x) = \{y \in E' : y[x] = \|x\|_E^2 = \|y\|_{E'}^2\}$

sowie $\lambda > 0$. Dann ist

$$y[\lambda A(\lambda - A)^{-1}x] = y[\lambda(\lambda(\lambda-A)^{-1}x - x)]$$

$$= \lambda(\, y[\lambda(\lambda-A)^{-1}x] - \underbrace{y[x]}_{=\|x\|^2,\ \text{da } y \in J(x)}\,)$$

und daher

$$\operatorname{Re} y[\lambda A(\lambda-A)^{-1}x] = \lambda \operatorname{Re}(y[\lambda(\lambda-A)^{-1}x] - \|x\|^2) \le 0,$$

denn $\operatorname{Re}(y[\lambda(\lambda-A)^{-1}x]) \le |y[\sim]| \le \|y\|\,\|\lambda(\lambda-A)^{-1}x\|$

$\le \|y\|\,\|x\| = \|x\|^2$.

Nach Lemma 1 im (vorigen) Absatz 2.2 gilt für $x \in D_A$, dass $\quad Ax = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda A(\lambda-A)^{-1}x$ und daher ist auch

$$\operatorname{Re} y[Ax] = \lim_{\lambda\to\infty} y[\lambda A(\lambda-A)^{-1}x] \le 0.$$

Also ist A dissipativ. Die Voraussetzung $(0,\infty) \subset \varrho(A)$ enthält die Aussage, dass $\lambda - A : D_A \to E$ für alle $\lambda > 0$ surjektiv ist, und damit ist A m-dissipativ.

Damit haben wir gezeigt:

<u>Satz</u> 1 (Lumer-Phillips, Standardversion): Sei $A : E \supset D_A \to E$ ein dicht definierter linearer Operator auf einem B-Raum E. Dann sind äquivalent:

(1) A ist m-dissipativ.

(2) A erzeugt eine Kontraktionshalbgruppe auf E.

Es soll noch eine etwas allgemeinere Version dieses Satzes bewiesen werden, in der neben der Dissipativität des Operators A lediglich vorausgesetzt wird, dass für ein $\lambda_0 > 0$ das Bild $R(\lambda_0 - A)$ von $\lambda_0 - A : D_A \to E$ dicht in $(E, \| \ \|)$ ist. Dafür benötigen wir den Begriff der Abschließbarkeit eines linearen Operators:

Def.: Es seien E und F B-Räume und $A : E \supset D_A \to F$ ein linearer Operator. A heißt <u>abschließbar</u>, wenn der Abschluß $\overline{G_A}$ von G_A in $E \times F$ der Graph eines Operators $\bar{A} : D_{\bar{A}} \to F$ ist. In diesem Fall wird $\bar{A}$ als <u>Abschluß</u> (oder <u>Abschließung</u>) von A bezeichnet.

Bem.: (1) Wenn A abschließbar ist, gelten $\bar{A}x = Ax$ für alle $x \in D_A$ und $\overline{G_A} = G_{\bar{A}}$. (By definition!)

(2) Ein Operator A wie oben ist genau dann abschließbar, wenn folgendes gilt:

Für alle Nullfolgen $(x_n)_n$ in D_A, für die $(Ax_n)_n$ in F gegen ein $y \in F$ konvergiert, ist $y = 0$.

Bew. von (2): "$\Rightarrow$" Sei A abschließbar mit Abschluß $\bar{A}$ und $(x_n)_n$ eine Nullfolge in E, so dass in F $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$. Dann ist in $E \times F$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, Ax_n) = (0, y) = (0, \bar{A}0) \implies y = 0.$$

$\bar{A}$ abgeschlossen

"$\Leftarrow$" Hier gelte: Für alle Nullfolgen $(x_n)_n$ in D_A, für die $(Ax_n)_n$ in F konvergiert, ist $\lim_{n\to\infty} Ax_n = 0$.

Dann definieren wir $\bar{A}: E \supset D_{\bar{A}} \to F$ durch die Vorschrift:

$x \in D_{\bar{A}} \iff \exists$ Folge $(x_n)_n$ in D_A, so dass die Grenzwerte

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ (in } E\text{) und } y = \lim_{n\to\infty} Ax_n \text{ in } F$$

existieren. In diesem Fall setzen wir $\bar{A}x := y$.

Aufgrund der Voraussetzung ist $\bar{A}x$ unabhängig von der approximierenden Folge, daher ist $\bar{A}$ wohldefiniert.

Weil A und die Grenzwertbildung linear sind, ist auch $\bar{A}$ linear. Ferner ist die Def. gerade so gewählt, dass $G_{\bar{A}}$ abgeschlossen ist und G_A umfasst (für letztes wähle man konstante Folgen $x_n = x \ \forall n \in \mathbb{N}$).

<u>Lemma</u> 4: Ist E ein B-Raum und $A: E \supset D_A \to E$ dicht definiert und dissipativ. Dann ist A abschließbar. ~~und $\bar{A}$ ebenfalls dissipativ~~

<u>Bew.</u>: Sei $(x_k)_k$ eine Nullfolge in D_A, so dass der Grenzwert $y := \lim_{n\to\infty} Ax_n$ existiert.

Sei $(y_k)_k$ eine Folge in D_A mit $\lim_{k\to\infty} y_k = y$.

Dann ist nach Lemma 1 für jedes $\lambda > 0$

$$\|(\lambda - A)(\lambda x_n + y_k)\| \geq \lambda \|\lambda x_n + y_k\|$$

Nach Division durch λ:

$$\| \lambda x_n - Ax_n + y_k + \frac{A}{\lambda} y_k \| \geq \| \lambda x_n + y_k \|$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$\| -y + y_k + \frac{A}{\lambda} y_k \| \geq \| y_k \|$$

und $\lambda \to \infty$ ergibt $\| -y + y_k \| \geq \| y_k \|$, woraus schließlich für $k \to \infty$ folgt

$$0 = \lim_{k \to \infty} \| -y + y_k \| \geq \lim_{k \to \infty} \| y_k \| = \| y \| \Rightarrow y = 0.$$

Also ist A abschließbar.

(Die Frage, ob die Abschließung $\bar{A}$ in jedem Fall ebenfalls dissipativ ist, bleibt an dieser Stelle offen. Die Aussage ist für das folgende jedoch auch nicht erforderlich. Es reicht die nachstehende Version von Lemma 2:)

Lemma 2': Es sei $A: E \supset D_A \to E$ ein linearer Operator auf einem B-Raum E mit der Eigenschaft:

$\forall \lambda > 0$ und $x \in D_A$ ist $\| (\lambda - A) x \| \geq \lambda \| x \|$. (E)

Dann sind äquivalent:

(1) Es gibt ein $\lambda_0 > 0$, so dass $\lambda_0 - A: D_A \to E$ surjektiv ist.

(2) Für alle $\lambda > 0$ ist $\lambda - A: D_A \to E$ surjektiv.

In diesem Fall ist $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

(Zu beachten ist, dass im Beweis von Lemma 2 lediglich die Folgerung (E) aus der Dissipativität verwendet wurde.)

Satz 2 (Lumer-Phillips, 2. Version): Es sei E ein B-Raum und $A: E \supset D_A \to E$ ein dicht definierter und dissipativer Operator. Für ein $\lambda_0 > 0$ sei $R(\lambda_0 - A) = \{(\lambda_0 - A)x : x \in D_A\}$ dicht in E. Dann erzeugt $\bar{A}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf E.

Bem.: Dass $\bar{A}$ existiert, folgt aus Lemma 4.

Bew.: Sei $x \in D_{\bar{A}}$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_n$ in D_A mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} Ax_n = \bar{A}x$. Mit Lemma 1 erhalten wir für alle $\lambda > 0$:

$$\|(\lambda - \bar{A})x\| = \lim_{n\to\infty} \|(\lambda - A)x_n\| \geq \lim_{n\to\infty} \lambda \|x_n\| = \lambda \|x\|.$$

Insbes. ist $\lambda - \bar{A}: D_{\bar{A}} \to E$ injektiv.

Nun soll gezeigt werden, dass $\lambda_0 - \bar{A}: D_{\bar{A}} \to E$ surjektiv ist. Dazu sei $y \in E$ vorgelegt. Da $R(\lambda_0 - A)$ in E dicht ist, existiert eine Folge $(x_k)_k$ in D_A, so dass $\lim_{k\to\infty} (\lambda_0 - A)x_k = y$.

Da A dissipativ ist, haben wir nach Lemma 1

$$\|x_k - x_\ell\| \leq \frac{1}{\lambda_0} \|(\lambda_0 - A)(x_k - x_\ell)\| \longrightarrow 0 \quad (k, \ell \to \infty),$$

und damit ist $(x_k)_k$ eine Cauchy-Folge in E und somit konvergent. Sei $x := \lim_{k\to\infty} x_k$. Da $\bar{A}$ und also auch $\lambda_0 - \bar{A}$ abgeschlossen sind, ist $x \in D_{\bar{A}}$

und $(\lambda_0 - \bar{A})x = \lim_{k\to\infty} (\lambda_0 - A)x_k = y$.

Damit ist gezeigt, dass $\lambda_0 - \bar{A} : D_{\bar{A}} \to E$ surjektiv ist.

Lemma 2' ergibt nun, dass $(0,\infty) \subset \rho(\bar{A})$.

Zwar haben wir $\|(\lambda - \bar{A})x\| \geq \lambda \|x\| \quad \forall x \in D_{\bar{A}}$, woraus mit der Surjektivität von $\lambda - \bar{A} : D_{\bar{A}} \to E$ folgt

$$\|\lambda(\lambda - \bar{A})^{-1} y\| \leq \|y\| \qquad \forall y \in E.$$

Nach dem Satz von Hille-Yosida erzeugt $\bar{A}$ eine Kontraktionshalbgruppe. $\square$