2.4. Adjungierte Operatoren und der Satz von Stone

In diesem Abschnitt sollen die bisherigen Ergebnisse auf den Hilbertraumfall spezialisiert werden. Dazu benötigen wir den Begriff des adjungierten Operators A^* für einen unbeschränkten Operator A auf einem Hilbertraum.

Lemma 1: Es seien H und G Hilberträume und $A: H \supset D_A \to G$ dicht definiert und linear. Dann gelten:

(1) $D_{A^*} := \{ y \in G : \varphi_y : D_A \to \mathbb{K},\ x \mapsto \varphi_y[x] := \langle Ax, y \rangle_G$ ist stetig auf $D_A \}$ (Bem. $D_A = (D_A, \| \ \|_H)$!)

ist ein linearer Teilraum von G.

(2) Für jedes $y \in D_{A^*}$ gibt es genau ein $A^*y \in H$, so dass $\forall x \in D_A$ gilt $\langle Ax, y \rangle_G = \langle x, A^*y \rangle_H$.

(3) $A^* : G \supset D_{A^*} \to H$ ist linear.

Bew.: (1) folgt daraus, dass Linearkombinationen stetiger Abbildungen wieder stetig sind.

(2) $z \in H$ sei ein weiteres Element mit $\langle x, z \rangle_H = \langle Ax, y \rangle_G$ $\forall x \in D_A$. Dann ist $\langle x, A^*y - z \rangle = 0$ $\forall x \in D_A$. Da n. V. $D_A \subset H$ dicht ist, folgt $A^*y = z$. $\Rightarrow$ Eindeutigkeit.

(Allgemeine Eigenschaft eines Hilbertraumes: Ein linearer TR F eines Hilbertraumes ist dicht in H $\Leftrightarrow$ $F^\perp = \{0\}$. Hier wurde nur die einfache Richtung verwendet.)

Existenz: $\varphi_y : D_A \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \varphi_y[x] = \langle Ax, y\rangle_G$ ist u.V. linear und stetig auf D_A, also gleichmäßig stetig.

Also existiert eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{\varphi}_y : \overline{D_A} = H \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \text{d.h. } \tilde{\varphi}_y \in H'.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es genau ein Element $A^*y \in H$ mit der Eigenschaft

$$\tilde{\varphi}_y[x] = \langle x, A^*y\rangle_H \quad \forall x \in H,$$

also auf $\langle Ax, y\rangle_G = \langle x, A^*y\rangle_H \quad \forall x \in D_A$.

(3) $\langle x, A^*(\lambda y + \mu z)\rangle_H = \langle Ax, \lambda y + \mu z\rangle_G = \bar{\lambda}\langle Ax, y\rangle_G + \bar{\mu}\langle Ax, z\rangle_G$

$= \bar{\lambda}\langle x, A^*y\rangle_H + \bar{\mu}\langle x, A^*z\rangle_H = \langle x, \lambda A^*x + \mu A^*z\rangle \quad \forall x \in D_A$.

<u>Def.</u>: Die lineare Abbildung

$$A^* : D_{A^*} \longrightarrow H, \quad y \longmapsto A^*y$$

mit A^*y wie in (2) von Lemma 1, heißt die <u>adjungierte Abbildung</u> zu $A : D_A \longrightarrow G$. (oder: adjungierter Operator)

Für den Fall $H = G$ sind weitere Begriffsbildungen von Bedeutung:

<u>Def.</u>: Ein dicht definierter Operator $A : H \supset D_A \to H$ heißt

(1) <u>symmetrisch</u>, falls $A \subset A^*$ (d.h. $D_A \subset D_{A^*}$ und $Ax = A^*x \quad \forall x \in D_A$),

(2) <u>selbstadjungiert</u>, wenn $A = A^*$ ist,

(3) <u>schief-selbstadjungiert</u>, falls $A^* = -A$ gilt.

<u>Bem.</u>: (1) Gleichheit von Operatoren bedeutet insbesondere die Gleichheit der Definitionsbereiche. Insofern ist tatsächlich nicht jeder symmetrische Operator selbstadjungiert.

<u>Bsp.</u>: $A = \Delta : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist symmetrisch (Fouriertransformation oder zweimal partiell integrieren), aber

$$\varphi_g [f] = \int \Delta f \, \bar{g} \, d\lambda = \int f \, \overline{\Delta g} \, d\lambda$$

ist ein stetiges lineares Funktional auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ für alle $g \in H^2(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$ (und genau für diese g). Daher ist

$$A^* = \Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

(Insofern spricht man manchmal von einer Realisierung des Laplace-Operators, wenn diesem ein bestimmter Definitionsbereich zugeordnet wird.)

(2) Es gilt: A ist schief-selbstadjungiert genau dann, wenn iA selbstadjungiert ist. (Definierende Gleichung in (2) von Lemma 1!) Die englische Bezeichnung ist "<u>skew-adjoint</u>".

Ein relevantes Beispiel sind die Schrödinger-Operatoren $A = iH = i(\Delta - V)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ mit dem Laplace-Operator und dem Multiplikator mit einem reellen Potential $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ moderaten Wachstums. Wählen wir

$$D_A = S(\mathbb{R}^n),$$

so erhalten wir einen dicht definierten, schiefsymmetrischen Operator, der allerdings nicht abgeschlossen ist. Mit der Wahl

$$D_A := \{ f \in H^2(\mathbb{R}^n) : Vf \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$$

erhalten wir in der Tat einen selbstadjungierten Operator.

Im Fall $V = 0$ (also $D_A = H^2(\mathbb{R}^n)$) ist mit Hilfe der Fouriertransformation leicht einzusehen, dass durch $U(t)f = \mathcal{F}^{-1} e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F} f$ eine Kontraktionsgruppe entsteht, deren Operatoren unitär sind. In der Tat haben wir mit der Parsevalschen Gleichung

$$\langle U(t)f, g \rangle_{L^2_x} = \int_{\mathbb{R}^n} U(t)f(x)\, \overline{g}(x)\, dx =$$

$$\overset{\text{Parseval}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(U(t)f)(\xi)\, \overline{\mathcal{F}g}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}f(\xi)\, \overline{\mathcal{F}g}(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(\xi)\, \overline{e^{it|\xi|^2} \mathcal{F}g(\xi)}\, d\xi = \langle f, U(-t)g \rangle_{L^2}$$

Also ist $U(t)^* = U(-t) = U(t)^{-1}$ ← Gruppeneigenschaften

d.h. $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine unitäre Gruppe.

Vermutung: Schief-selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum H erzeugen stets eine unitäre Gruppe.

Dass dem tatsächlich so ist, ist der wesentliche Inhalt des Satzes von Stone (1932), auf den wir jetzt zusteuern. Zunächst sollen wir uns jedoch einige grundlegende Tatsachen über die Adjungierten unbeschränkter, dicht definierter linearer Hilbertraum-Operatoren verklaren:

Gegeben seien zwei Hilberträume H und G mit Skalarprodukten $\langle\, , \rangle_H$ bzw. $\langle\, , \rangle_G$. Dann werden $H\times G$ und $G\times H$ mit einem Skalarprodukt $\langle\, , \rangle_{H\times G}$ bzw $\langle\, , \rangle_{G\times H}$ ausgestattet durch

$$\langle (x,y),(\varphi,\psi)\rangle_{H\times G} := \langle x,\varphi\rangle_H + \langle y,\psi\rangle_G = \langle (y,x),(\psi,\varphi)\rangle_{G\times H}$$

Wir definieren einen beschränkten linearen Operator

$$U: H\times G \to G\times H,\quad (x,y)\mapsto U(x,y) = (y,-x)$$

Dann ist U invertierbar mit Inverser

$U^{-1}: G\times H \to H\times G\ ,\ (y,x)\mapsto U^{-1}(y,x) = (-x,y)$.

Wir berechnen den adjungierten Operator U^* von U. Da U beschränkt (und also überall definiert) ist, müssen wir uns um den Definitionsbereich keine Gedanken machen. Für $(\psi,\varphi)\in G\times H$ ist $U^*(\psi,\varphi)$ definiert durch die Bedingung

$$\forall (x,y)\in H\times G \text{ ist}: \langle (x,y), U^*(\psi,\varphi)\rangle_{H\times G} = \langle U(x,y),(\psi,\varphi)\rangle_{G\times H}$$

$$= \langle (y,-x),(\psi,\varphi)\rangle_{G\times H} = \langle y,\psi\rangle_G + \langle x,-\varphi\rangle_H = \langle (x,y),(-\varphi,\psi)\rangle_{H\times G}$$

also: $U^*(\psi,\varphi) = (-\varphi,\psi) = U^{-1}(\psi,\varphi)$, d.h. U ist unitär.

Lemma 2: Für jeden dicht definierten Operator $A: H\supset D_A \to G$ zwischen Hilberträumen H und G gelten:

$$(1)\qquad G(A^*) = (U(G(A)))^\perp = U(G(A)^\perp)$$

$$(2)\qquad G(A^{**}) = (U^{-1}(G(A^*)))^\perp = U^{-1}(G(A^*)^\perp)$$

Bem.: Hierbei ist $A^{**} := (A^*)^*$ und, für einen linearen Teilraum F eines Hilbertraums H, $F^\perp := \{x\in H: \langle x,y\rangle = 0\ \forall y\in F\}$ das orthogonale Komplement von F. $F^\perp$ ist immer abgeschlossen ($F^\perp = \bigcap_{y\in F}\{x: \langle x,y\rangle = 0\}$) und es gilt $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

Bew.: Die jeweils zweite Identität folgt daraus, dass unitäre Abbildungen das Skalarprodukt erhalten.

Zu (1): $G(A) = \{ (x, Ax) \in H \times G : x \in D_A \}$

$\Rightarrow \quad U(G(A)) = \{ (Ax, -x) \in G \times H : x \in D_A \}$

$\Rightarrow \left\{ (\psi, \varphi) \in (U(G(A)))^{\perp} \Leftrightarrow \langle (\psi, \varphi), (Ax, -x) \rangle_{G \times H} = 0 \quad \forall x \in D_A \right.$

$\Leftrightarrow \quad \langle \psi, Ax \rangle_G = \langle \varphi, x \rangle_H \Leftrightarrow \psi \in D_{A^*}$ und $\varphi = A^* \psi$

$\Leftrightarrow \quad (\psi, \varphi) = (\psi, A^* \psi) \wedge \psi \in D_{A^*} \}$

$\Rightarrow \quad (U(G(A)))^{\perp} = G(A^*)$, wie behauptet.

$\square$

(2) ist analog zu zeigen.

Folgerungen: $A : H \supset D_A \to G$ und $B : H \supset D_B \to G$ seien dicht definierte lineare Operatoren zwischen Hilberträumen H und G. Dann gelten:

(1) $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$

(2) A^* ist abgeschlossen.

(3) Ist A abschließbar, so ist $\bar{A} = A^{**}$. Insbes. gilt $A = A^{**}$, falls A abgeschlossen ist.

Begründungen: Zu (1): Bildung von $^{\perp}$ kehrt Inklusionen um. Zu (2) $F^{\perp}$ ist stets abgeschlossen. (Anwenden mit $F = U(G(A))$!). (3) folgt aus

$$G(\bar{A}) = \overline{G(A)} = G(A)^{\perp\perp} = (U^{-1} G(A^*))^{\perp} \quad (\text{Lemma } 2\,(1))$$

$$\text{Lemma } 2, (2) \qquad = G(A^{**}) .$$

Lemma 3: Ist $A: H \supset D_A \to G$ linear und dicht definiert, so gelten:

(1) $\ker(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$.

(2) A^* ist dicht definiert genau dann, wenn A abschließbar ist.

Bew.: (1) $A^*y = 0 \iff \langle A^*y, x\rangle = 0 \quad \forall x \in H$

$\underset{A \text{ dicht def}}{\iff} \langle A^*y, x\rangle = 0 \quad \forall x \in D_A \iff \langle y, Ax\rangle = 0 \quad \forall x \in D_A$

$\iff y \in \mathcal{R}(A)^\perp$.

(2) A ist abschließbar $\iff \overline{G(A)}$ ist der Graph einer linearen Abbildung $\iff \pi_H : \overline{G(A)} \to H$ ist injektiv $\underset{\pi_H \text{ lin.}}{\iff} \{(x,y) \in \overline{G(A)} : x = 0\} = \{(0,0)\}$

$\iff \{(0,y) \in \overline{G(A)}\} = \{(0,0)\}$

Nun ist nach Lemma 2 (1):

$\overline{G(A)} = G(A)^{\perp\perp} = (U^{-1}(G(A^*)))^\perp = \{(-A^*x, x) : x \in D_{A^*}\}^\perp$,

also $(0,y) \in \overline{G(A)} \iff (0,y) \perp (-A^*x, x) \quad \forall x \in D_{A^*}$

$\iff y \in (D_{A^*})^\perp$.

Das bedeutet: A ist abschließbar $\iff (D_{A^*})^\perp = \{0\}$

$\iff D_{A^*} \subset G$ ist dicht.

$\square$

Damit können wir zurückkehren zu den C^0-Halbgruppen auf einem Hilbertraum H:

Satz 1: Es sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C^0-Halbgruppe auf einem Hilbertraum H mit Generator A. Die Operatorenfamilie $(T^*(t))_{t\geq 0}$ sei definiert durch $T^*(t) := (T(t))^*$ für alle $t \geq 0$. Dann ist $(T^*(t))_{t\geq 0}$ ebenfalls eine C^0-Halbgruppe, und ihr Generator ist A^*.

Bew.: In vier Schritten:

1. Allgemein gilt für einen Operator $B \in L(H)$, dass auch $B^* \in L(H)$ mit $\|B^*\| = \|B\|$ gilt, denn

$$\|B\| = \sup_{\substack{x\in H \\ \|x\|\leq 1}} \|Bx\| = \sup_{\substack{x,y\in H \\ \|x\|,\|y\|\leq 1}} |\langle y, Bx\rangle|$$

$$= \sup_{\sim} |\langle x, B^*y\rangle| = \sup_{\substack{\|y\|\leq 1 \\ y\in H}} \|B^*y\| = \|B^*\|.$$

Also ist für alle $t \geq 0$ auch $T^*(t) \in L(H)$ und es gilt $\|T^*(t)\| = \|T(t)\|$.

2. Algebraische Eigenschaften: $\forall x, y \in H$ ist

- $\langle T^*(0)x, y\rangle = \langle x, T(0)y\rangle = \langle x, y\rangle \Rightarrow T^*(0) = I$
- $\langle T^*(t+s)x, y\rangle = \langle x, T(s+t)y\rangle = \langle x, T(s)T(t)y\rangle$

$$= \langle T^*(s)x, T(t)y\rangle = \langle T^*(t)T^*(s)x, y\rangle \Rightarrow T^*(t+s) = T^*(t)T^*(s)$$

3. Starke Stetigkeit: Wir haben für alle $x, y \in H$:

$$\langle (T^*(t+h) - T^*(t))x, y \rangle \overset{(*)}{=} \langle x, (T(t+h) - T(t))y \rangle \longrightarrow 0 \ (h \to 0)$$

Daher ist für jedes $x \in H$ die Abbildung

$$[0, \infty) \longrightarrow H, \quad t \longmapsto T^*(t)x$$

schwach stetig, also insbesondere meßbar. Schritt 1 liefert die Beschränktheit dieser Abbildung und der Satz von Bochner die Integrierbarkeit auf jedem kompakten Teilintervall von $[0, \infty)$.

Nun gilt nach Lemma 3 (b) in Abschnitt 2.1, dass

$$T(t+h)y - T(t)y = A \int_t^{t+h} T(s)y \, ds \qquad \forall y \in H$$

und damit für $x \in D_{A^*}$, $y \in H$

$$\langle (T^*(t+h) - T^*(t))x, y \rangle \overset{(*)}{=} \langle x, (T(t+h) - T(t))y \rangle$$

$$= \langle x, A \int_t^{t+h} T(s)y \, ds \rangle = \langle A^*x, \int_t^{t+h} T(s)y \, ds \rangle$$

$$= \int_t^{t+h} \langle T^*(s)A^*x, y \rangle ds \underset{\text{Vorüberlegung}}{=} \langle \int_t^{t+h} T^*(s)A^*x \, ds, y \rangle$$

Für $x \in D_{A^*}$ folgt $(T^*(t+h) - T^*(t))x = \int_t^{t+h} T^*(s)A^*x \longrightarrow 0$ $(h \to 0)$.

Nun ist nach Lemma 3 (2) D_{A^*} dicht in H. Ist nun also $x \in H$ beliebig gegeben, so existiert eine Folge $(x_n)_n$ in D_{A^*} mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Damit erhalten wir:

$$\|(T^*(t+h)-T^*(t))x\| \le \|T^*(t+h)(x-x_n)\| + \|(T^*(t+h)-T^*(t))x_n\|$$

Wachstumsschranke für T wie für T^*, vgl. Schritt 1

$$+ \|T^*(t)(x_n-x)\|$$

$$\le M\exp(|\omega|(t+1))\,\|x-x_n\| + \|(T^*(t+h)-T^*(t))x_n\|$$

Jetzt $h\to 0$, dann $n\to\infty$, leicht zu sehen, dass

$$\lim_{h\to 0} T^*(t+h)x = T^*(t)x \quad \forall x\in H.$$

4. Aussage über den Generator

Nach 1. bis 3. wissen wir: $(T^*(t))_{t\ge 0}$ ist eine C^0-Halbgruppe, besitzt also einen infinitesimalen Generator, dieser sei mit B bezeichnet. Wir wollen $B=A^*$, also insbes. $D_B = D_{A^*}$ zeigen. Dazu sei zunächst

$$y\in D_B = \{y\in H : \lim_{t\to 0}\tfrac{1}{t}(T^*(t)-I)y =: By \text{ existiert}\}.$$

Dann ist für $x\in D_A$:

$$\langle By, x\rangle = \lim_{t\to 0}\tfrac{1}{t}\langle (T^*(t)-I)y, x\rangle \overset{(*)}{=} \lim_{t\to 0}\langle y, \tfrac{1}{t}(T(t)-I)x\rangle$$

$$\overset{x\in D_A}{=} \langle y, \lim_{t\to 0}\tfrac{1}{t}(T(t)-I)x\rangle = \langle y, Ax\rangle.$$

D.h. $\varphi_y : H\to\mathbb{K}$, $x\mapsto \varphi_y[x] := \langle y, Ax\rangle$ ist auf D_A ein stetiges lineares Funktional, denn nach der Rechnung oben ist $|\varphi_y[x]| \le \|x\|\,\|By\|$. Also $y\in D_{A^*}$ und $A^*y = By$. D.h. $D_B\subset D_{A^*}$, $A^*|_{D_B} = B$, kurz: $B \subset A^*$.

Umgekehrt sei $y \in D_{A^*}$. Dann gilt für alle $x \in D_{A^*}^{H}$:

$$\langle (T^*(t)-I)y, x\rangle \overset{(*)}{=} \langle y, (T(t)-I)x\rangle = \langle y, A\int_0^t T(s)x\,ds\rangle$$

$$= \langle A^*y, \int_0^t T(s)x\,ds\rangle = \langle \int_0^t T^*(s)A^*y\,ds, x\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{t}(T^*(t)-I)y = \frac{1}{t}\int_0^t T^*(s)A^*y\,ds \longrightarrow A^*y \quad (t\to 0)$$

nach dem Hauptsatz. Wir erhalten $y \in D_B$ sowie $By = A^*y$, damit ist $A^* = B$ gezeigt. $\square$

Folgerung: Ist $A: H \supset D_A \to H$ der Generator einer unitären Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf H, so ist A schief-selbstadjungiert.

Begründung: Da $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ unitär ist, haben wir

$$T^*(t) = (T(t))^{-1} = T(-t)$$

und damit

$$\frac{1}{t}(T^*(t)-I)x = \frac{1}{t}(T(-t)-I)x$$

Für $x \in D_A$ existiert der Grenzwert rechts und wir haben

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T^*(t)-I)x = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T(-t)-I)x = -Ax$$

Nach Satz 1 ist der Erzeuger von T^* gerade A^*, also $D_A \subset D_{A^*}$ und $A^*|_{D_A} = -A$.

Entsprechend für $x \in D_{A^*}$.

Das ist bereits die eine Richtung des folgenden

Satz (Stone): Sei H ein Hilbertraum und $A: H \supset D_A \to H$ linear und dicht definiert. Dann gilt:

A erzeugt genau dann eine unitäre Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf H, wenn A schief-selbstadjungiert ist.

Bew.: Es ist nur noch "$\Leftarrow$" zu zeigen, also sei $A^*=-A$.

Dann haben wir $\langle x, Ax\rangle = \langle A^*x, x\rangle = -\langle Ax, x\rangle$

$= -\overline{\langle x, Ax\rangle} \implies \mathrm{Re}\langle x, Ax\rangle = \frac{1}{2}(\langle x, Ax\rangle + \langle Ax, x\rangle) = 0$,

d.h. A ist dissipativ, ebenso A^*.

Nach Lemma 1 des vorigen Abschnitts ist $I-A^*$ injektiv, und mit Lemma 3 erhalten wir

$$\{0\} = \ker(I-A^*) = R(I-A)^\perp,$$

d.h. $I-A$ hat dichtes Bild. Nach dem Satz von Lumer-Phillips (2. Version) erzeugt $A=\overline{A}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf H, ebenso $-A$. Damit erzeugt A eine Kontraktionsgruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf H (Folgerung aus Hille-Yosida!)

A^* erzeugt nach Satz 1 ebenfalls eine Gruppe $(T^*(t))_{t\in\mathbb{R}}$, für die wg. $A^*=-A$ gilt $T^*(t)=T(-t)$ $=(T(t))^{-1}$, also ist $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ unitär.

$\square$