Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2022/23
17.10.2022
Blatt 1

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Aufgabe 1 (6 P.) Zeigen Sie, dass für die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} \cosh(b) & \sinh(b) \\ \sinh(b) & \cosh(b) \end{pmatrix}$$

Was ändert sich am Ergebnis, wenn Sie $e^{\widetilde{A}}$ berechnen für die Matrix $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$?

Hinweis: Es gilt $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, und die Potenzen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ können direkt durch Matrix-Multiplikation berechnet werden.

Aufgabe 2 (4 P.) Gegeben sei das inhomogene lineare Differenzialgleichungssystem $\frac{dy}{dt} = Ay + f$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie diejenige Lösung y_p dieses Systems, die der Anfangsbedingung $y_p(0) = (0,0)^\top$ genügt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (6 P.) Für die 2×2 - Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

berechne man den Kommutator $[A, B] := AB - BA$ und zeige, dass

(a) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$,

(b) $e^{(A+B)} \neq e^A e^B$.

Aufgabe 4 (8 P.) Gegeben sei das lineare System

$$\frac{dy}{dt}(t) = A(t)y(t) \tag{1}$$

gewöhnlicher Differenzialgleichungen mit $A \in C([-T, T], \mathbb{C}^{n \times n})$. Untersuchen Sie, unter welcher möglichst allgemeinen und einfachen Bedingung an die matrixwertigen Funktionen A und $\mathbb{A}(t) := \int_0^t A(s)ds$ durch $\Phi(t) := e^{\mathbb{A}(t)}$ ein Lösungsfundamentalsystem für das System (1) gegeben ist. Zeigen Sie anhand eines einfachen ($n = 2$ genügt) Beispiels, dass die von Ihnen angegebene Bedingung notwendig ist.

Abgabe: 24.10.2022, in der Vorlesung,
Besprechung: 27.10.2022