Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2022/23
31.10.2022
Blatt 3

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Aufgabe 6 (Volterra-Operator, 2+4+1=7 P.) Es seien $E = (C([0,1]), \| \quad \|_\infty)$ und $A : E \to E$ definiert durch $Af(x) := \int_0^x f(t)dt$.

(a) Berechnen Sie die Operatornorm $\|A\|$.

(b) Bestimmen Sie für $\lambda \neq 0$ die Resolvente $R_A(\lambda)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{0\}$.

Aufgabe 7 (2+4+1=7 P.) Auf dem Banachraum $E = (C_0(\mathbb{R}), \| \quad \|_\infty)$ sei für festes $h > 0$ der lineare Operator

$$A_h : E \to E, \quad f \mapsto A_h f$$

definiert durch

$$A_h f(x) := \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)).$$

Zeigen Sie:

(a) $A_h \in L(E)$ mit $\|A_h\| = \dfrac{2}{h}$,

(b) für $t \geq 0$ ist

$$e^{tA_h} f(x) = e^{-\frac{t}{h}} \sum_{l=0}^{\infty} \big(\frac{t}{h}\big)^l \frac{f(x+lh)}{l!},$$

(c) es gilt $\|e^{tA_h}\| \leq 1$.

Bitte wenden!

Aufgabe 8 (1+5+3=9 P.) Es sei $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra und $\gamma : I \to \mathcal{A}$ differenzierbar, d. h. für alle $t \in I$ existiere der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t)) =: \gamma'(t).$$

(a) Zeigen Sie: Ist $\gamma'(t) = 0$ für alle $t \in I$, so ist γ konstant.

(b) Formulieren und beweisen Sie eine Produktregel für Funktionen γ und δ wie oben. Welche Eigenschaft der Norm auf einer B-Algebra wird verwendet?

(c) Beweisen Sie: Ist $\gamma'(t) = \gamma(t) \cdot a$ für ein festes $a \in \mathcal{A}$, so gilt $\gamma(t) = \gamma(0)e^{ta}$. (Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung hat man auch $\gamma(t) = e^{ta}\gamma(0)$?)

Abgabe: 07.11.2022, in der Vorlesung,
Besprechung: 10.11.2022