Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2022/23
07.11.2022
Blatt 4

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Aufgabe 9 (Graphennorm, 1+4=5 P.) Es seien E und F Banachräume, $D_A \subset E$ ein dichter linearer Teilraum und $A : D_A \to F$ linear. Für $x \in D_A$ setzt man

$$\|x\|_{D_A} := \|x\|_E + \|Ax\|_F$$

.
Zeigen Sie:

(a) Hierdurch wird eine Norm auf D_A definiert.
(b) $(D_A, \| \quad \|_{D_A})$ ist genau dann ein Banachraum, wenn A abgeschlossen ist.

Aufgabe 10 (3+5=8 P.) Es seien $1 \leq p < \infty$,

$$D_X := \{f \in L^p(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^p dx < \infty\}$$

und $X : L^p(\mathbb{R}) \supset D_X \to L^p(\mathbb{R})$ definiert durch $Xf(x) := xf(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass der Multiplikationsoperator X dicht definiert und abgeschlossen ist.
(b) Bestimmen Sie das Punktspektrum $\sigma_p(X)$, das Stetigkeitsspektrum $\sigma_c(X)$ und das Restspektrum $\sigma_r(X)$.

Aufgabe 11 (6 P.) Es seien E und F Banachräume, $A : E \supset D_A \to E$ ein dicht definierter und abgeschlossener Operator in E und $T : F \to E$ ein Isomorphismus von Banachräumen (d.h. linear, bijektiv und stetig mit stetiger Inverser). Der Operator

$$B : F \supset D_B \to F$$

sei definiert durch $D_B := T^{-1}(D_A)$ und $B := T^{-1}AT$. Zeigen Sie, dass B ebenfalls dicht definiert und abgeschlossen ist, und dass $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$, $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$ sowie $\sigma_r(A) = \sigma_r(B)$ gelten.

Bitte wenden!

Aufgabe 12 (3 P.) Es seien $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), f \mapsto \widehat{f}$ die Fouriertransformation,

$$D_P := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |\xi \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}\}$$

und

$$P : L^2(\mathbb{R}) \supset D_P \to L^2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto Pf := \mathcal{F}^{-1}\xi\mathcal{F}f.$$

(P ist wohldefiniert, da $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ aufgrund des Satzes von Plancherel ein isometrischer Isomorphismus ist.) Zeigen Sie:

(a) Für $f \in C_0^1(\mathbb{R})$ ist $Pf = -if'$,

(b) P ist dicht definiert und abgeschlossen.

Analysieren Sie das Spektrum von P.

Abgabe: 14.11.2022, in der Vorlesung,
Besprechung: 17.11.2022