Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2022/23
14.11.2022
Blatt 5

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Problem 2 (Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, 2+1+4+1=8 P.) Es seien $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra mit Einselement und $a, b \in \mathcal{A}$, die mit Ihrem Kommutator $[a, b] = ab - ba$ kommutieren, es gelte also $[a, [a, b]] = [b, [a, b]] = 0$. Im folgenden soll gezeigt werden, dass für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{ta} e^{tb} = e^{t(a+b) + \frac{t^2}{2}[a,b]}, \tag{1}$$

also insbesondere

$$e^{a+b} = e^{-\frac{1}{2}[a,b]} e^a e^b. \tag{2}$$

(a) Erläutern Sie die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2).

(b) Setzen Sie $\gamma(t) = e^{ta} e^{tb} e^{-\frac{t^2}{2}[a,b]}$ und differenzieren Sie dies mit Hilfe der Produktregel (vgl. Aufgabe 8 (b)).

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a) der Aufgabe 8, dass

$$e^{-tb} a e^{tb} = a + t[a, b]$$

und vereinfachen Sie damit Ihr Ergebnis zu (b).

(d) Benutzen Sie nun Teil (c) der Aufgabe 8, um den Beweis abzuschließen.

Problem 3 (3+1+3+2=9 P.) Es sei $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra mit Einselement I, nicht notwendig kommutativ. Für $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| < 1$ definiert man

$$\log(I + a) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n.$$

(Wegen $\|a\| < 1$ konvergiert diese Reihe in der Operatornorm.) Zeigen Sie:

(a) $\exp(\log(I + a)) = I + a$,

(b) für $\|a\| \le r < 1$ ist $\|\log(I + a) - a\| \lesssim_r \|a\|^2$,

(c) für $a, b \in \mathcal{A}$ und $m \ge 4 \max(\|a\|, \|b\|)$ ist

$$\|\log(e^{\frac{a}{m}} e^{\frac{b}{m}}) - \frac{a}{m} - \frac{b}{m}\| \lesssim_{a,b} \frac{1}{m^2}.$$

Folgern Sie die "Lie-product-formula"

$$e^{a+b} = \lim_{m\to\infty} (e^{\frac{a}{m}} e^{\frac{b}{m}})^m.$$

(Bemerkung: Das Symbol $x \lesssim_{a,b,...} y$ bedeutet: Es gibt eine Konstante $C = C(a, b, ..)$, so dass $x \le Cy$.)

Abgabe: 21.11.2022, in der Vorlesung,
Besprechung: 24.11.2022