Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2022/23
21.11.2022
Blatt 6

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Problem 4 (3+5+2=10 P.) Gegeben seien die Vektorräume

$$E_1 := C_b(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : f \text{ ist beschränkt}\},$$

$$E_2 := C_{u,b}(\mathbb{R}) := \{f \in C_b(\mathbb{R}) : f \text{ ist gleichmäßig stetig}\},$$

$$E_3 := C_{(0)}(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}.$$

Alle seien mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ ausgestattet.

(a) Begründen Sie, dass es sich bei den $(E_i, \|\quad\|_\infty)$ um Banachräume handelt. Sie können hierzu verwenden, dass abgeschlossene lineare Teilräume eines Banachraums ebenfalls Banachräume sind.

(b) Untersuchen Sie, in welchen Fällen durch $T(t)f(x) := f(x+t)$ eine stark stetige Gruppe beschränkter linearer Operatoren auf $(E_i, \|\quad\|_\infty)$ definiert wird, und

(c) bestimmen Sie gegebenenfalls deren infinitesimale Generatoren A_i und die zugehörigen Definitionsbereiche D_{A_i}. Gilt in diesen Fällen $D_{A_i} \subset C^1(\mathbb{R})$?

Problem 5 (2+2+6+2+3+1=16 P.) Es seien $1 \le p < \infty$, $t \in \mathbb{R}$ sowie

$$O_t := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ definieren wir $R(t)f(x) := f(O_{-t}x)$.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $R(t) : L^p(\mathbb{R}^2) \to L^p(\mathbb{R}^2)$ ein isometrischer Isomorphismus. Bestimmen Sie $R(t)^{-1}$. Ist $R(t)$ für $p = 2$ unitär?

Bitte wenden!

(b) Zeigen Sie, dass $(R(t))_{t\in\mathbb{R}}$ den Gruppeneigenschaften $R(0) = I$ und $R(t+s) = R(t)R(s)$ genügt.

(c) Beweisen Sie, dass $(R(t))_{t\in\mathbb{R}}$ stark stetig ist. Betrachten Sie dazu zunächst $f \in C_0(\mathbb{R}^2)$, und führen Sie den allgemeinen Fall hierauf mit einem Approximationsargument zurück.

(d) Untersuchen Sie, ob $(R(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ bzw. auf $C_{(0)}(\mathbb{R}^2)$ ebenfalls stark stetig ist.

(e) Es sei A der infinitesimale Generator von $(R(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Berechnen Sie Af für $f \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ und zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(R(t)f - f) = Af$ mit Konvergenz in $L^p(\mathbb{R}^2)$ gilt (hierbei $1 \leq p < \infty$).

(f) Wie kann man D_A sinnvollerweise als Raum vom Sobolev'schen Typ (mit gewichteter Norm) beschreiben (ohne Beweis) ?

Abgabe: 28.11.2022, in der Vorlesung,
Besprechung: 01.12.2022