

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Problem 6 (2+2+1+3=8 P.) Unter einer Skalentransformation auf dem \mathbb{R}^n sei im folgenden eine Schar $(S_\lambda)_{\lambda>0}$ linearer Abbildungen

$$S_\lambda : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \quad \text{definiert durch} \quad S_\lambda f(x) = f(\lambda x)$$

verstanden. Hierbei sei $1 \leq p < \infty$.

- (a) Zeigen Sie, dass S_λ beschränkt ist, und bestimmen Sie die Operatornorm $\|S_\lambda\|_{p \rightarrow p}$.
- (b) Interpretieren Sie $(S_\lambda)_{\lambda>0}$ als eine stark stetige Gruppe $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$, so dass $\lambda \geq 1$ dem Bereich $t \geq 0$ entspricht, und überprüfen Sie die Halbgruppeneigenschaft $T(t+s) = T(t)T(s)$.
- (c) Welche Wachstumsschranke für $(T(t))_{t \geq 0}$ ergibt sich aus Ihrem Ergebnis zu (a)? Ist $(T(t))_{t \geq 0}$ exponentiell stabil?
- (d) Es sei A der infinitesimale Generator von $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Bestimmen Sie durch formale Rechnung Af für $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Drücken Sie A in Polarkoordinaten aus.

Aufgabe 13 (3+3=6 P.) Es seien E und F Banachräume, $(T_A(t))_{t \geq 0}$ eine C^0 -Halbgruppe auf E mit Generator $A : E \supset D_A \rightarrow E$ und $T \in L(F, E)$ ein Isomorphismus, vgl Aufgabe 11. Auf F sei die Operatornschar $(T_B(t))_{t \geq 0}$ definiert durch $T_B(t) := T^{-1}T_A(t)T$. Zeigen Sie, dass $(T_B(t))_{t \geq 0}$ eine C^0 -Halbgruppe auf F ist, und bestimmen Sie deren Generator $B : F \supset D_B \rightarrow F$.

Aufgabe 14 (3+2 P.) Es seien \mathcal{A} eine Banach-Algebra mit Einselement I und $a \in \mathcal{A}$ mit $a^4 = I$. Ferner seien $a_\pm := \frac{1}{2}(I \pm a^2)$. Zeigen Sie, dass

$$e^{ta} = \cosh(t)a_+ + a \sinh(t)a_+ + \cos(t)a_- + a \sin(t)a_-.$$

Sind Ihnen derartige Elemente a einer Banachalgebra bekannt, z.B. aus den Vorlesungen "Einführung PDE" oder "Harmonische Analysis"? Um Trivialfälle und bereits Diskutiertes auszuschließen, sei zusätzlich $a^2 \neq \pm I$ gefordert.

Abgabe: 05.12.2022, in der Vorlesung,

Besprechung: 08.12.2022