Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2022/23
05.12.2022
Blatt 8

ÜBUNGEN ZU
PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Problem 7 (3+3+4+1=11 P.) Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und unbeschränkt sowie, für $1 \le p < \infty$,

$$M : L^p(\Omega) \supset D_M \to L^p(\Omega), \quad f \mapsto Mf \quad \text{def. durch} \quad Mf(x) = m(x)f(x),$$

mit Definitionsbereich $D_M = \{f \in L^p(\Omega) : Mf \in L^p(\Omega)\}$. (Dass M dicht definiert und abgeschlossen ist, haben wir in Aufgabe 10 (a) im wesentlichen bereits gesehen.)

(a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an m an, so dass M einen Eigenwert besitzt.
(b) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(M)$.
(c) Unter welcher hinreichenden Voraussetzung an m erzeugt M eine C^0 - Halbgruppe $(T_M(t))_{t\geq 0}$ beschränkter linearer Operatoren auf $L^p(\Omega)$? Geben Sie $T_M(t)$ explizit an.
(d) Wie ist die Bedingung in (c) zu verschärfen, damit M eine stark stetige Gruppe $(T_M(t))_{t\in\mathbb{R}}$ erzeugt?

Aufgabe 15 (5 P.) Es seien E ein Banachraum und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) $T := (T(t))_{t\geq 0}$ ist eine C^0 - Halbgruppe auf E mit Generator A und Wachstumsschranke $\omega(T) = \omega_0$.

(b) $e^{-\lambda\cdot}T := (e^{-\lambda t}T(t))_{t\geq 0}$ ist eine C^0 - Halbgruppe auf E mit Generator $A - \lambda I$ und Wachstumsschranke $\omega(e^{-\lambda\cdot}T) = \omega_0 - \lambda$.

Bitte wenden!

Problem 8 (3+2+3+1=9 P.) Es seien E ein Banachraum, $A : E \supset D_A \to E$ der Generator eine Kontraktionshalbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ und $x \in D_{A^2}$. Zeigen Sie:

(a) $T(t)x = x + tAx + \displaystyle\int_0^t (t-s)T(s)A^2x ds$,
(b) die *Landau-Kolmogorov-Ungleichung* $\|Ax\|^2 \leq 4\|x\|\|A^2x\|$;
(c) falls $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine Kontraktions*gruppe* ist, kann diese verschärft werden zu $\|Ax\|^2 \leq 2\|x\|\|A^2x\|$.

Was ergibt sich für die Translationsgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$?

Abgabe: 12.12.2022, in der Vorlesung,
Besprechung: 15.12.2022