Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2022/23
12.12.2022
Blatt 9

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Zur Bearbeitung des folgenden Problems ist es gegebenenfalls erforderlich, dass Sie die Grundtatsachen der Hilbertraumtheorie rekapitulieren: Skalarprodukt, Orthonormalsystem (ONS), äquivalente Bedingungen für die Vollständigkeit eines ONS, etc.. (Siehe z. B.: Werner, Kap. V, oder Meise/Vogt, §§ 11 und 12.)

Problem 9 (2+5+2+5=14 P.) Es seien H ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und

$$A : H \supset D_A := \{x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n \quad \text{konvergiert in} \quad H\} \to H$$

definiert durch $Ax := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$. $\ell^2(\mathbb{N})$ bezeichne den Hilbertraum aller quadratsummierbaren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $D_A = \{x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty\}$.

(b) Bestimmen Sie einen isometrischer Isomorphismus $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to H$ und einen linearen Teilraum D_M von $\ell^2(\mathbb{N})$, so dass
$$T^{-1}AT : T^{-1}(D_A) \to \ell^2(\mathbb{N})$$
übereinstimmt mit dem Multiplikationsoperator
$$M : \ell^2(\mathbb{N}) \supset D_M \to \ell^2(\mathbb{N}), \qquad a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto Ma := (\lambda_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(c) Welche Folgerungen bezüglich des Operators A und seines Spektrums ergeben sich aus Aufgabe 11 und Problem 7? Unter welcher Bedingung an die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\sigma(A) = \sigma_p(A)$?

(d) Unter welcher (jeweils minimalen) Voraussetzung an die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugt A
  (i) eine C^0-Halbsgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$,
  (ii) eine stark stetige Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$,
  (iii) eine normstetige Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ bzw.
  (iv) eine unitäre Gruppe $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf H?
  Geben Sie $(T(t))_{t\in I}$ explizit an! (Tip zu Teil (d): Beachten Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 13!)

Bitte wenden!

Aufgabe 16 (4 P.) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Bestimmen Sie für $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ das Subdifferential

$$J(f) = \{y \in (L^1(X, \mathcal{A}, \mu))' : \|y\|^2 = \|f\|_1^2 = y[f]\}.$$

Hinweis: Nach dem Satz über die Dualräume von L^p ist

$$\Phi : L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \to (L^1(X, \mathcal{A}, \mu))', \quad g \mapsto \Phi(g),$$

definiert durch $\Phi(g)[f] := \int fg d\mu$, ein isometrischer Isomorphismus.

Aufgabe 17 (4 P.) Ein Banachraum E heißt *strikt konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in E$ mit $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ gilt, dass

$$\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Im Folgenden sei E ein Banachraum mit strikt konvexen Dualraum E'. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $x \in E$ ist das Subdifferential $J(x) = \{y \in E' : \|x\|^2 = \|y\|^2 = y[x]\}$ einelementig.

(b) Ist $\{0\} \neq F$ ein linearer Teilraum von E und $y \in F'$, so existiert höchstens ein $Y \in E'$ mit $Y|_F = y$ und $\|Y\| = \|y\|$. (Eindeutigkeit der Hahn-Banach-Fortsetzung)

Abgabe: 09.01.2023, in der Vorlesung,
Besprechung: 12.01.2023

Ich wünsche Ihnen ein schönes Weihnachtsfest, einen guten Übergang ins neue Jahr und eine erholsame Ferienzeit.