

## ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Für  $A, B \in L(E)$  mit  $[A, B] = 0$  ist bekannt, dass  $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$ . Im Folgenden soll, unter möglichst schwachen Voraussetzungen, eine entsprechende Aussage für  $C^0$ -Halbgruppen gezeigt werden, die von unbeschränkten Operatoren erzeugt werden.

**Aufgabe 18 (2+2+1+3=8 P.)** Es seien  $E$  ein Banachraum und  $A : E \supset D_A \rightarrow E$  sowie  $B : E \supset D_B \rightarrow E$  dicht definierte lineare Operatoren mit  $\rho(A) \neq \emptyset \neq \rho(B)$ . Für ein  $\lambda_0 \in \rho(A)$  und ein  $\mu_0 \in \rho(B)$  gelte

$$(\lambda_0 - A)^{-1}(\mu_0 - B)^{-1}x = (\mu_0 - B)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1}x \quad \text{für alle } x \in E.$$

Zeigen Sie, dass

- (a)  $D := \{(\lambda_0 - A)^{-1}(\mu_0 - B)^{-1}x : x \in E\} = \{x \in D_A \cap D_B : Ax \in D_B \wedge Bx \in D_A\}$  gilt,
- (b) dies ein dichter linearer Teilraum von  $(D_A, \| \cdot \|_{D_A})$  und  $(D_B, \| \cdot \|_{D_B})$  sowie von  $(E, \| \cdot \|)$  ist,
- (c) für alle  $x \in D$  gilt  $ABx = BAx$ , und
- (d)  $(\lambda - A)^{-1}(\mu - B)^{-1}x = (\mu - B)^{-1}(\lambda - A)^{-1}x$  für alle  $x \in E$ ,  $\lambda \in \rho(A)$  und  $\mu \in \rho(B)$ .

Hinweis: Für  $\lambda_0 \in \rho(A)$  ist  $(\lambda_0 - A)^{-1} : (E, \| \cdot \|) \rightarrow (D_A, \| \cdot \|_{D_A})$  ein Isomorphismus von Banachräumen. (Warum?)

**Problem 10 (6+4=10 P.)** Es seien  $(T_A(t))_{t \geq 0}$  und  $(T_B(t))_{t \geq 0}$  Kontraktionshalbgruppen auf einem Banachraum  $E$  mit Generatoren  $A : E \supset D_A \rightarrow E$  bzw.  $B : E \supset D_B \rightarrow E$ . Für alle  $x \in E$  gelte

$$(I - A)^{-1}(I - B)^{-1}x = (I - B)^{-1}(I - A)^{-1}x.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$T(t) := T_A(t)T_B(t) \quad (t \geq 0)$$

eine Kontraktionshalbgruppe mit Generator  $C \supset A + B$  definiert wird.

Hinweis: Benutzen Sie zuerst Aufgabe 18 und die Yosida-Approximationen, um die Vertauschungsrelation  $[T_A(t), T_B(s)] = 0$  zu zeigen. Beachten Sie, dass  $D_{A+B} := D_A \cap D_B$ .

**Abgabe:** 16.01.2023, in der Vorlesung,  
**Besprechung:** 19.01.2023