Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2022/23
16.01.2023
Blatt 11

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Problem 11 (Klein-Gordon-Gleichung; 6+3+3+2=14 P.) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Der Hilbertraum $H := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ sei versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle_H := \langle u_1, v_1 \rangle_{H^1(\Omega)} + \langle u_2, v_2 \rangle_{L^2(\Omega)};$$

der Operator $A : H \supset D_A \to H, \quad (u_1, u_2) \mapsto A(u_1, u_2) := (u_2, (\Delta - I)u_1)$ habe den Definitionsbereich $D_A := D_\Delta \times H_0^1(\Omega)$ mit $D_\Delta := \{f \in H_0^1(\Omega) : \Delta f \in L^2(\Omega)\}$, wie in der Vorlesung bei der Diskussion der Wärmeleitungsgleichung verwendet.

(a) Zeigen Sie, dass A eine Kontraktionsgruppe auf H erzeugt.

(b) In welchem Sinn ist das Cauchy-Problem

$$(w(0), \frac{dw}{dt}(0)) = (w_0, w_1) \in D_\Delta \times H_0^1(\Omega)$$

für die Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{d^2w}{dt^2} - \Delta w + w = 0$$

mit Dirichlet-Randbedingung $w|_{\partial\Omega} = \frac{dw}{dt}|_{\partial\Omega} = 0$ wohlgestellt; was können Sie insbesondere über die Regularität seiner Lösung aussagen?

(c) Wie ist das Argument zu modifizieren, um die Wohlgestelltheit desselben Anfangsrandwertproblems für die etwas allgemeinere Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{d^2w}{dt^2} - \Delta w + m^2 w = 0 \qquad \text{mit} \qquad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

zu zeigen?

Bitte wenden!

(d) Für *beschränkte* Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in H_0^1(\Omega)$ gilt die Poincare-Ungleichung

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{\Omega,n} \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$$

mit $c_{\Omega,n}^n = \frac{\lambda(\Omega)}{\lambda(B_1(0))}$ (unabhängig von f, siehe z.B. Jost, J.: Partial Differential Equations, Thm. 10.2.2). Welche Konsequenz ergibt sich hieraus für den Fall $m = 0$, d.h. für die (klassische) Wellengleichung?

Abgabe: 23.01.2023, in der Vorlesung,
Besprechung: 26.01.2023