

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Aufgabe 6 (1+5+3=9 P.) Es sei $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra und $\gamma : I \rightarrow \mathcal{A}$ differenzierbar, d. h. für alle $t \in I$ existiere der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\gamma(t+h) - \gamma(t)) =: \gamma'(t).$$

- (a) Zeigen Sie: Ist $\gamma'(t) = 0$ für alle $t \in I$, so ist γ konstant.
- (b) Formulieren und beweisen Sie eine Produktregel für Funktionen γ und δ wie oben. Welche Eigenschaft der Norm auf einer B-Algebra wird verwendet?
- (c) Beweisen Sie: Ist $\gamma'(t) = \gamma(t) \cdot a$ für ein festes $a \in \mathcal{A}$, so gilt $\gamma(t) = \gamma(0)e^{ta}$. (Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung hat man auch $\gamma(t) = e^{ta}\gamma(0)$?)

Aufgabe 7 (Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, 1+4+1 P.) Es seien $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra mit Einselement und $a, b \in \mathcal{A}$, die mit Ihrem Kommutator $[a, b] = ab - ba$ kommutieren, es gelte also $[a, [a, b]] = [b, [a, b]] = 0$. Im folgenden soll gezeigt werden, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{t(a+b)} = e^{-\frac{t^2}{2}[a,b]} e^{ta} e^{tb},$$

also insbesondere

$$e^{a+b} = e^{-\frac{1}{2}[a,b]} e^a e^b.$$

- (a) Setzen Sie $\gamma(t) = e^{ta} e^{tb} e^{-\frac{t^2}{2}[a,b]}$ und differenzieren Sie dies mit Hilfe der Produktregel (vgl. Aufgabe 6 (b)).
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a) der Aufgabe 6, dass

$$e^{-tb} a e^{tb} = a + t[a, b]$$

und vereinfachen Sie damit Ihr Ergebnis zu (b).

- (c) Benutzen Sie nun Teil (c) der Aufgabe 6, um den Beweis abzuschließen.

Bitte wenden!

Aufgabe 8 (3+2 P.) Es seien $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra mit Einselement I und $a \in \mathcal{A}$ mit $a^4 = I$. Ferner seien $a_{\pm} := \frac{1}{2}(I \pm a^2)$. Zeigen Sie, dass

$$e^{ta} = \cosh(t)a_+ + a \sinh(t)a_+ + \cos(t)a_- + a \sin(t)a_-.$$

Sind Ihnen derartige Elemente a einer Banachalgebra bekannt, z.B. aus den Vorlesungen “Einführung PDE” oder “Harmonische Analysis”? Um Trivialfälle und bereits Diskutiertes auszuschließen, sei zusätzlich $a^2 \neq \pm I$ gefordert.

Besprechung: 02.11.2026