Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2026/27
02.11.2026
Blatt 4

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Aufgabe 9 (Lie-Produkt-Formel, 3+1+3+2 P.) Es sei $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra mit Einselement I, nicht notwendig kommutativ. Für $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| < 1$ definiert man

$$\log(I+a) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n.$$

(Wegen $\|a\| < 1$ konvergiert diese Reihe in der Norm auf $\mathcal{A}$.) Zeigen Sie:

(a) $\exp(\log(I+a)) = I + a$,
(b) für $\|a\| \le r < 1$ ist $\|\log(I+a) - a\| \lesssim_r \|a\|^2$,
(c) für $a, b \in \mathcal{A}$ und $m \ge 4\max(\|a\|, \|b\|)$ ist

$$\|\log(e^{\frac{a}{m}} e^{\frac{b}{m}}) - \frac{a}{m} - \frac{b}{m}\| \lesssim_{a,b} \frac{1}{m^2}.$$

Folgern Sie die "Lie-product-formula"

$$e^{a+b} = \lim_{m\to\infty} (e^{\frac{a}{m}} e^{\frac{b}{m}})^m.$$

(Bemerkung: Das Symbol $x \lesssim_{a,b,\ldots} y$ bedeutet: Es gibt eine Konstante $C = C(a,b,..)$, so dass $x \le Cy$.

Aufgabe 10 (5 P.) Finden Sie ein Element a einer Banachalgebra (z.B. einen stetigen linearen Operator auf einem Hilbertraum) mit den folgenden Eigenschaften

$$(i) \qquad \|a\| = 1, \qquad (ii) \qquad a^n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (iii) \qquad \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Bestimmen Sie das Spektrum von a.

Bitte wenden!

Aufgabe 11 (Graphennorm, 1+4 P.) Es seien E und F Banachräume, $D_A \subset E$ ein dichter linearer Teilraum und $A : D_A \to F$ linear. Für $x \in D_A$ setzt man

$$\|x\|_{D_A} := \|x\|_E + \|Ax\|_F$$

.
Zeigen Sie:

(a) Hierdurch wird eine Norm auf D_A definiert.

(b) $(D_A, \| \quad \|_{D_A})$ ist genau dann ein Banachraum, wenn A abgeschlossen ist.

Besprechung: 09.11.2026