Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2026/27
09.11.2026
Blatt 5

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Die folgende Aufgabe enthält ein Beispiel eines nicht abschließbaren linearen Funktionals.

Aufgabe 12 (6 P.) Es seien H ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$D_A := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \right\}$$

und

$$A : H \supset D_A \to \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \mapsto A\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Zeigen Sie, dass A nicht abschließbar ist. (Ist A dicht definiert?)

Problem 2 (2+1+2+2+2+2+2+1=14 P.) Es seien (X,τ) ein lokal kompakter Hausdorff-Raum und

$$C_{(0)}(X) := \{f \in C(X) : \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\},$$

ausgestattet mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$. ($C_{(0)}(X)$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum des Banachraums $(B(X), \| \quad \|_\infty)$, dem Raum aller beschränkten Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, und somit selbst ein Banachraum. - $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ bedeutet hier Folgendes: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein Kompaktum $K \subset X$, so dass $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in K^c$.) Weiter seien $m : X \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und

$$M : C_{(0)}(X) \supset D_M \to C_{(0)}(X), \quad f \mapsto Mf, \quad \text{definiert durch} \quad Mf(x) := m(x)f(x)$$

mit Definitionsbereich $D_M := \{f \in C_{(0)}(X) : Mf \in C_{(0)}(X)\}$. Zeigen Sie:

Bitte wenden!

(a) $C_0(X) := \{f \in C(X) : \text{supp}(f) \text{ ist kompakt}\}$ liegt dicht in $C_{(0)}(X)$; M ist dicht definiert.
(b) M ist abgeschlossen.
(c) M ist stetig genau dann, wenn m beschränkt ist, und es gilt $\|M\| = \|m\|_\infty$.
(d) $\sigma(M) = \overline{m(X)}$.
(e) $\lambda \in \sigma_p(M)$ gilt genau dann, wenn eine offene Menge $\emptyset \neq \Omega \subset X$ existiert, so dass $m(x) = \lambda$ für alle $x \in \Omega$.
(f) $\sigma_r(M) = \overline{m(X)} \setminus \sigma_p(M)$.
(g) $\sigma_c(M) = \overline{m(X)} \setminus m(X)$.

Konstruieren Sie einen Multiplikationsoperator auf $C_{(0)}(\mathbb{R})$, für den alle Bestandteile des Spektrums nicht leer sind.

Hinweis: In jedem lokal kompakten Hausdorff-Raum (X, τ) gilt das folgende Lemma von Urysohn: Ist $\Omega \in \tau$ und $K \subset \Omega$ kompakt, so existiert ein $\varphi \in C_0(X)$ mit

(1) $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ für alle $x \in X$,
(2) $\varphi(x) = 1$ für alle $x \in K$ und
(3) $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$.

Einen Beweis dieses Lemmas finden Sie z.B. in: Rudin, Walter; Real and Complex Analysis, Lemma 2.12.

Aufgabe 13 (2+2 P.) Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $m : X \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion. Dann heißt

$$R_{ess}(m) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ ist } \mu(\{x \in X : |m(x) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0.\}$$

der *wesentliche Wertebereich* von m bezüglich μ.

(a) Zeigen Sie, dass $R_{ess}(m) \subset \overline{m(X)}$.

Nun sei zusätzlich vorausgesetzt, dass (X, τ) ein Hausdorff-Raum und $m : X \to \mathbb{C}$ stetig sind, sowie dass $\mathcal{A}$ die Borelmengen von X enthält und $\mu(\Omega) > 0$ ist für jede nichtleere offene Menge $\Omega \subset X$.

(b) Zeigen Sie, dass $\overline{m(X)} \subset R_{ess}(m)$.

Besprechung: 16.11.2026