

## ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

**Aufgabe 20 (2+2+3=7 P.)** Für einen stetigen Operator  $T \in L(E, F)$  zwischen Banachräumen  $E$  und  $F$  definiert man den dualen Operator  $T' : F' \rightarrow E'$  durch die Festlegung  $T'y[x] := y[Tx]$  für alle  $x \in E$ . Ist  $(T(t))_{t \geq 0}$  eine  $C^0$ -Halbgruppe auf einem Banachraum  $E$ , so definiert man  $(T'(t))_{t \geq 0}$  durch  $T'(t) = (T(t))'$  für alle  $t \geq 0$ . Zeigen Sie:

- (a) Für  $T \in L(E, F)$  ist  $T' \in L(F', E')$  und es gilt  $\|T\| = \|T'\|$ .
- (b)  $(T'(t))_{t \geq 0}$  ist eine Familie von Operatoren in  $L(E')$ , die den Halbgruppeneigenschaften  $T'(0) = I$  und  $T'(t+s) = T'(t)T'(s)$  genügt.
- (c)  $(T'(t))_{t \geq 0}$  ist im allgemeinen *nicht* stark stetig. (Wählen Sie ein möglichst einfaches Beispiel aus den in Vorlesung und Übung diskutierten  $C^0$ -Halbgruppen.)

**Aufgabe 21 (7+4=11 P.)** Für einen unbeschränkten, dicht definierten Operator  $A : E \supset D_A \rightarrow F$  zwischen Banachräumen  $E$  und  $F$  definiert man den dualen (oder adjungierten) Operator  $A' : F' \supset D_{A'} \rightarrow E'$  durch

$$D_{A'} := \{y \in F' : \exists y' \in F', \text{ so dass } \forall x \in D_A : y[Ax] = y'[x]\}$$

und  $A'y := y'$ . (Beachten Sie, dass  $A'$  aufgrund der Voraussetzung  $\overline{D_A} = E$  wohldefiniert ist.) Nun sei  $(T(t))_{t \geq 0}$  eine  $C^0$ -Halbgruppe auf einem Banachraum  $E$  mit Generator  $A$  und dualer Halbgruppe  $(T'(t))_{t \geq 0}$ , wie in Aufgabe 20 definiert. Zeigen Sie:

- (a) Ist  $E$  reflexiv, so ist  $(T'(t))_{t \geq 0}$  stark stetig.
- (b) Ist  $(T'(t))_{t \geq 0}$  stark stetig, so wird sie von  $A'$  erzeugt.

Hinweis: Ein Banachraum  $E$  heißt reflexiv, wenn die Einbettung  $J : E \rightarrow E''$ , definiert durch  $Jx[y] := y[x]$ , surjektiv ist. Ist dies der Fall, stimmen schwache und Schwach\*-Konvergenz auf  $E'$  überein. Ferner ist  $A'$  in diesem Fall stets dicht definiert, (was Sie ohne Beweis verwenden können).

**Abgabe:** 03.07.2018, in der Vorlesung,  
**Besprechung:** 09.07.2018