Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2018
24.04.2018
Blatt 2

ÜBUNGEN ZU
PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Problem 1 (2+3+2+4+4=15 P.) Es sei E ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Für $A \in L(E)$ definiert man

$$\cos A := \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA}) \qquad \text{und} \qquad \sin A := \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$$

.

(a) Verifizieren Sie die Identitäten $e^{iA} = \cos A + i \sin A$ und $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = I$,

(b) geben Sie die Potenzreihendarstellungen für die Funktionen $\cos : L(E) \to L(E)$ und $\sin : L(E) \to L(E)$ an. In welchem Sinn konvergieren diese Reihen?

(c) Untersuchen Sie, ob die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auch für ihre oben definierten operatorwertigen Verallgemeinerungen gelten.

(d) Zeigen Sie, dass $Y(t) := \cos(tA)$ mit $t \in \mathbb{R}$ dem Anfangswertproblem $Y(0) = I$, $Y'(0) = 0$ für die gewöhnliche (Operator-) Differenzialgleichung

$$Y'' + A^2 Y = 0$$

genügt. Welches Anfangswertproblem wird von $Z(t) := \sin(tA)$ gelöst?

(e) Nun sei $A \in L(E)$ invertierbar und $F \in C([-T, T], L(E))$. Bestimmen Sie eine "Variation der Konstanten"- bzw. Duhamel-Formel für die Lösung des Problems $Y(0) = Y'(0) = 0$ für die inhomogene lineare Gleichung

$$Y'' + A^2 Y = F.$$

Hinweis zu (e): Gehen Sie davon aus, dass der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung auch für stetige vektorwertige (hier: $L(E)$ - wertige) Funktionen gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (4+3=7 P.) Die klassischen Bewegungsgleichungen zweier gekoppelter Pendel gleicher Längen und Massen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1''(t) + (\alpha + k)x_1(t) - kx_2(t) &= 0 \\ x_2''(t) - kx_1(t) + (\alpha + k)x_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist $k > 0$ die Kopplungskonstante und $\alpha = \frac{g}{l} > 0$ mit der Gravitationskonstante g und der Länge l beider Pendel.

(a) Schreiben Sie das System in Kurzform

$$x''(t) + Bx(t) = 0$$

mit einer geeigneten 2×2 - Matrix B und diagonalisieren Sie B. Ermitteln Sie die (eindeutig bestimmte) positiv definite Matrix A, für die $A^2 = B$ gilt.

(b) Verwenden Sie die Ergebnisse aus Problem 1, um diejenige Lösung des obigen Dgl.-Systems zu bestimmen, die den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $x'(0) = y_0$ mit gegebenen $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2$ genügt. (Es erweist sich als vorteilhaft, am Ende von Teil (a) die Größen $\omega_+ := \sqrt{\alpha + 2k}$ und $\omega_- := \sqrt{\alpha}$ einzuführen. Können Sie diese Größen als Frequenzen interpretieren?)

Aufgabe 6 (4 P.) (a) Es seien $X, \frac{d}{dx} : C_c^1(\mathbb{R}) \to C_c(\mathbb{R})$ definiert durch $Xf(x) := xf(x)$ und $\frac{d}{dx}f(x) := f'(x)$. Berechnen Sie den Kommutator $[\frac{d}{dx}, X]$.

(b) Nun seien $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra mit Einselement I und $a, b \in \mathcal{A}$.

(i) Zeigen Sie: Wenn $[a, b] = I$ gilt, so folgt $[a^n, b] = na^{n-1} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Folgern Sie, dass $[a, b] \neq I$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$.

Abgabe: 30.04.2018, in der Übung,
Besprechung: 07.05.2018