Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2018
30.04.2018
Blatt 3

ÜBUNGEN ZU
PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Aufgabe 7 (Volterra-Operator, 2+4+1=7 P.) Es seien $E = (C([0,1]), \| \quad \|_\infty)$ und $A : E \to E$ definiert durch $Af(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

(a) Berechnen Sie die Operatornorm $\|A\|$.

(b) Bestimmen Sie für $\lambda \neq 0$ die Resolvente $R_A(\lambda)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{0\}$.

Problem 2 (Shift-Operator, 2+4+2+1+8=17 P.) Es seien $1 \leq p < \infty$, $E = \ell^p(\mathbb{N})$ der Banachraum aller p-summierbaren Folgen $x = (x_n)_n$ mit Norm $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ und $S : E \to E$ der Shift-Operator, definiert durch $Sx := (0, x_1, x_2, \dots)$.

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $(s_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$, so dass $(Sx)_i = \sum_{j=1}^{\infty} s_{ij}x_j$. Skizzieren Sie eine geeignete linke obere Teilmatrix von $(s_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$.

(b) Berechnen Sie e^{tS} und geben Sie Ihr Ergebnis als Matrix (wie in (a)) an.

(c) Bestimmen Sie das Punktspektrum $\sigma_p(S)$.

(d) Ist $0 \in \sigma(S)$?

(e) Bestimmen Sie die Resolventenmenge $\rho(S)$ und, für $\lambda \in \rho(S)$, eine Matrixdarstellung der Resolvente $R_S(\lambda)$ (ebenfalls wie in (a)).

Bitte wenden!

Aufgabe 8 (Graphennorm, 1+4=5 P.) Es seien E und F Banachräume, $D_A \subset E$ ein dichter linearer Teilraum und $A : D_A \to F$ linear. Für $x \in D_A$ setzt man

$$\|x\|_{D_A} := \|x\|_E + \|Ax\|_F$$

.
Zeigen Sie:

(a) Hierdurch wird eine Norm auf D_A definiert.

(b) $(D_A, \| \quad \|_{D_A})$ ist genau dann ein Banachraum, wenn A abgeschlossen ist.

Abgabe: 08.05.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 14.05.2018