Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2018
08.05.2018
Blatt 4

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Aufgabe 9 (5 P.) Es seien (X, d) ein separabler metrischer Raum und $Y \subset X$. Zeigen Sie, dass auch $(Y, d|_Y)$ separabel ist.

Hinweis: Die Aufgabe ist *nicht* dadurch zu lösen, dass man den Durchschnitt der abzählbaren dichten Teilmenge von X mit Y bildet. Z.B. hat $\mathbb{R}^2$, ausgestattet mit der Standardmetrik, $\mathbb{Q}^2$ als abzählbare dichte Teilmenge. Was ist $\mathbb{Q}^2 \cap Y$ für $Y = \{(x, \pi x) : x \in \mathbb{R}\}$?

Aufgabe 10 (1+5+5=11 P.) Es sei $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra und $\gamma : I \to \mathcal{A}$ differenzierbar, d. h. für alle $t \in I$ existiere der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t)) =: \gamma'(t).$$

(a) Zeigen Sie: Ist $\gamma'(t) = 0$ für alle $t \in I$, so ist γ konstant.

(b) Formulieren und beweisen Sie eine Produktregel für Funktionen γ und δ wie oben. Welche Eigenschaft der Norm auf einer B-Algebra wird verwendet?

(c) Beweisen Sie: Ist $\gamma'(t) = \gamma(t) \cdot a$ für ein festes $a \in \mathcal{A}$, so gilt $\gamma(t) = \gamma(0)e^{ta}$. (Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung hat man auch $\gamma(t) = e^{ta}\gamma(0)$?)

Bitte wenden!

Problem 3 (Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, 3+2+4+2=11 P.) Es seien $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra und $a, b \in \mathcal{A}$, die mit Ihrem Kommutator $[a,b] = ab - ba$ kommutieren, es gelte also $[a,[a,b]] = [b,[a,b]] = 0$. Im folgenden soll gezeigt werden, dass für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{ta}e^{tb} = e^{t(a+b)+\frac{t^2}{2}[a,b]}, \tag{1}$$

also insbesondere

$$e^{a+b} = e^{-\frac{1}{2}[a,b]}e^a e^b. \tag{2}$$

(a) Erläutern Sie die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2).

(b) Setzen Sie $\gamma(t) = e^{ta}e^{tb}e^{-\frac{t^2}{2}[a,b]}$ und differenzieren Sie dies mit Hilfe der Produktregel (vgl. Aufgabe 10 (b)).

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a) der Aufgabe 10, dass

$$e^{-tb}ae^{tb} = a + t[a,b]$$

und vereinfachen Sie damit Ihr Ergebnis zu (b).

(d) Benutzen Sie nun Teil (c) der Aufgabe 10, um den Beweis abzuschließen.

Abgabe: 22.05.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 28.05.2018