Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2018
22.05.2018
Blatt 5

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Aufgabe 11 (3+1=4 P.) Es sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, E)$, so dass $f = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, E)$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Für jedes kompakte Teilintervall $J \subset \mathbb{R}$ ist $\displaystyle\int_J f(t)dt = 0$;

(b) $f(t) = 0$ für λ-fast alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Für (a) approximiere man χ_J geeignet durch C_c^∞-Funktionen. Für (b) verwende man die erste Version des Hauptsatzes (Satz 5).

Aufgabe 12 (2+2=4 P.) Es seien $I = (t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{D}'(I, E)$ mit distributioneller Ableitung $T' = 0$ und $\theta \in \mathcal{D}(I)$ mit $\displaystyle\int_I \theta(t)dt = 1$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ sei ferner

$$\psi_\varphi(t) := \int_{t_0}^t (\varphi(s) - \theta(s) \int_I \varphi(\sigma)d\sigma)ds.$$

Zeigen Sie:

(a) $\psi_\varphi \in \mathcal{D}(I)$.

(b) Es gilt $T = x_0$ für $x_0 = T[\theta] \in E$ in dem Sinne, dass $T[\varphi] = x_0 \displaystyle\int_I \varphi(t)dt$ ist für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$.

Problem 4 (4+3+3+4+1=15 P.) Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und unbeschränkt sowie, für $1 \leq p < \infty$,

$$M : L^p(\Omega) \supset D_M \to L^p(\Omega), \quad f \mapsto Mf \quad \text{def. durch} \quad Mf(x) = m(x)f(x),$$

mit Definitionsbereich $D_M = \{f \in L^p(\Omega) : Mf \in L^p(\Omega)\}$.

(a) Ist M dicht definiert und abgeschlossen?

(b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an m an, so dass M einen Eigenwert besitzt.

Bitte wenden!

(c) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(M)$.

(d) Unter welcher hinreichenden Voraussetzung an m erzeugt M eine C^0 - Halbgruppe $(T_M(t))_{t\geq 0}$ beschränkter linearer Operatoren auf $L^p(\Omega)$? Geben Sie $T_M(t)$ explizit an.

(e) Wie ist die Bedingung in (d) zu verschärfen, damit M eine stark stetige Gruppe $(T_M(t))_{t\in\mathbb{R}}$ erzeugt?

Abgabe: 29.05.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 04.06.2018