Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2018
05.06.2018
Blatt 7

# ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

**Problem 6 (3+2+2+3+2=12 P.)** Es seien $f \in C^2(\mathbb{T})$, $(P_r)_{0 \le r < 1}$ der Poissonkern und

$$v(r,\theta) := \begin{cases} P_r * f(\theta) & : \quad 0 \le r < 1 \\ f(\theta) & : \quad r = 1 \end{cases},$$

sowie $u : \mathbb{R}^2 \supset \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(x,y) := (r\sin\theta, r\cos\theta) \mapsto u(x,y) = u(r\sin\theta, r\cos\theta) := v(r,\theta).$$

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse der Vorlesung, dass auf $[0,1) \times [-\pi, \pi)$ gilt

$$\left( \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v(r,\theta) = 0.$$

(b) Mit Hilfe der Kettenregel zeige man

$$r\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \qquad \text{kurz:} \qquad r\frac{\partial}{\partial r} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

.

(c) Drücken Sie $\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 v(r,\theta)$ durch $u$ und die kartesischen Koordinaten $x$ und $y$ aus.

(d) Bestimmen Sie $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v(r,\theta)$ in den Variablen $u$; $x$ und $y$.

(e) Zeigen Sie, dass $u$ das Dirichlet-Problem $u|_{\partial B_1(0)} = g$ für die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

mit $g(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta)$ löst.

Bitte wenden!

**Aufgabe 14 ("Semigroups everywhere ?"; 2+2+1+2=7 P.)** Unter einer Skalentransformation auf dem $\mathbb{R}^n$ sei im folgenden eine Schar $(S_\lambda)_{\lambda>0}$ linearer Abbildungen

$$S_\lambda : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \qquad \text{definiert durch} \qquad S_\lambda f(x) = f(\lambda x)$$

verstanden. Hierbei sei $1 \leq p < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass $S_\lambda$ beschränkt ist, und bestimmen Sie die Operatornorm $\|S_\lambda\|_{p\to p}$.

(b) Interpretieren Sie $(S_\lambda)_{\lambda>0}$ als eine stark stetige Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$, so dass $\lambda \geq 1$ dem Bereich $t \geq 0$ entspricht, und überprüfen Sie die Halbgruppeneigenschaft $T(t+s) = T(t)T(s)$.

(c) Welche Wachstumsschranke für $(T(t))_{t\geq 0}$ ergibt sich aus Ihrem Ergebnis zu (a) ? Ist $(T(t))_{t\geq 0}$ exponentiell stabil?

(d) Es sei $A$ der infinitesimale Generator von $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Bestimmen Sie durch formale Rechnung $Af$ für $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

**Aufgabe 15 (3+2+3+3=11 P.)** Es sei $E$ ein Banachraum und $A : E \supset D_A \to E$ ein linearer Operator, so dass sowohl $iA$ als auch $-iA$ eine $C^0$-Halbgruppe $(T_+(t))_{t\geq 0}$ beziehungsweise $(T_-(t))_{t\geq 0}$ erzeugen. Zeigen Sie mit den Ideen aus Problem 1, dass das Cauchy-Problem

$$u(0) = u_0 \in D_{A^2} \quad , \qquad \frac{du}{dt}(0) = Au_1 \in D_A \qquad \text{für die Gleichung} \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + A^2u = 0$$

klassisch wohlgestellt ist in folgendem Sinn:

(1) Für alle $(u_0, u_1) \in D_{A^2} \times D_{A^2}$ existiert genau eine Lösung $u \in \bigcap_{j=0}^{2} C^{2-j}([0,\infty), D_{A^j})$ dieses Problems;

(2) für alle $t > 0$ existiert ein $C_t > 0$, so dass für alle $j \in \{0,1,2\}$ die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\sup_{0\leq s\leq t} \|A^j u(s)\|_E + \|\big(\frac{d}{dt}\big)^j u(s)\|_E \leq C_t\big(\|A^j u_0\|_E + \|A^j u_1\|_E\big).$$

Tip zur Eindeutigkeit: Betrachten Sie die Zerlegung

$$\frac{d^2}{dt^2} + A^2 = \big(\frac{d}{dt} + iA\big)\big(\frac{d}{dt} - iA\big) = \big(\frac{d}{dt} - iA\big)\big(\frac{d}{dt} + iA\big).$$

**Abgabe:** 12.06.2018, in der Vorlesung,
**Besprechung:** 18.06.2018