Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2018
12.06.2018
Blatt 8

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Zur Bearbeitung des folgenden Problems ist es gegebenenfalls erforderlich, dass Sie die Grundtatsachen der Hilbertraumtheorie rekapitulieren: Skalarprodukt, Orthonormalsystem (ONS), äquivalente Bedingungen für die Vollständigkeit eines ONS, Satz von der orthogonalen Projektion und Rieszscher Darstellungssatz; normale, unitäre und selbstadjungierte Operatoren in $L(H)$. (Siehe z. B.: Werner, Kap. V, oder Meise/Vogt, §§ 11 und 12.)

Problem 7 (6+7+3=16 P.) Es seien H ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und

$$A : H \supset D_A := \{x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n \quad \text{konvergiert in} \quad H\} \to H$$

definiert durch $Ax := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$.

(a) Zeigen Sie:
  (i) A ist dicht definiert.
  (ii) $D_A = \{x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty\}$.
  (iii) A ist abgeschlossen.

(b) Unter welcher (minimalen) Voraussetzung an die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugt A eine C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$? Geben Sie $T(t)$ explizit an, und überprüfen Sie die Halbgruppeneigenschaften.

(c) Unter welcher (minimalen) Voraussetzung an die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entsteht auf diese Weise
  (i) eine stark stetige Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf H,
  (ii) eine normstetige Gruppe auf H,
  (iii) eine unitäre Gruppe auf H (das bedeutet, dass alle Operatoren $T(t)$ einer stark stetigen Gruppe unitär sind) ?

Bitte wenden!

Aufgabe 16 (4 P.) Es seien E ein Banachraum, $A \in L(E)$ und

(i) $\lambda > \|A\|$ oder

(ii) $\lambda > 0$ und $\|e^{tA}\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$.

Zeigen Sie (ohne Verwendung des Satzes von Hille-Yosida), dass

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA} dt.$$

Begründen Sie zunächst die Existenz des $L(E)$ - wertigen Integrals.

Aufgabe 17 (5 P.) Es seien E ein Banachraum und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) $T := (T(t))_{t\geq 0}$ ist eine C^0 - Halbgruppe auf E mit Generator A und Wachstumsschranke $\omega(T) = \omega_0$.

(b) $e^{-\lambda \cdot} T := (e^{-\lambda t} T(t))_{t\geq 0}$ ist eine C^0 - Halbgruppe auf E mit Generator $A - \lambda I$ und Wachstumsschranke $\omega(e^{-\lambda \cdot} T) = \omega_0 - \lambda$.

Abgabe: 19.06.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 25.06.2018