Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2018
19.06.2018
Blatt 9

# ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN I

Für $A, B \in L(E)$ und Isomorphismen $S \in L(E, F)$ ist bekannt, dass

$$\exp(tSAS^{-1}) = S\exp(tA)S^{-1}$$

und, falls $[A, B] = 0$,

$$\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$$

gelten. Im Folgenden sollen entsprechende Aussagen für stark stetige Halbgruppen gezeigt werden, die von unbeschränkten Operatoren erzeugt werden.

**Aufgabe 18 (3+3=6 P.)** Es seien $E$ und $F$ Banachräume, $(T_A(t))_{t\geq 0}$ eine $C^0$-Halbgruppe auf $E$ mit Generator $A : E \supset D_A \to E$ und $S \in L(E, F)$ ein Isomorphismus. Auf $F$ sei die Operatorenschar $(T_B(t))_{t\geq 0}$ definiert durch $T_B(t) := ST_A(t)S^{-1}$. Zeigen Sie, dass $(T_B(t))_{t\geq 0}$ eine $C^0$-Halbgruppe auf $F$ ist, und bestimmen Sie deren Generator $B : F \supset D_B \to F$.

**Aufgabe 19 (3+2+1+3+1=10 P.)** Es seien $E$ ein Banachraum und $A : E \supset D_A \to E$ sowie $B : E \supset D_B \to E$ dicht definierte lineare Operatoren mit $\rho(A) \neq \emptyset \neq \rho(B)$. Für ein $\lambda_0 \in \rho(A)$ und ein $\mu_0 \in \rho(B)$ gelte

$$(\lambda_0 - A)^{-1}(\mu_0 - B)^{-1}x = (\mu_0 - B)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1}x \quad \text{für alle} \quad x \in E.$$

Zeigen Sie, dass

(a) $D := \{(\lambda_0 - A)^{-1}(\mu_0 - B)^{-1}x : x \in E\} = \{x \in D_A \cap D_B : Ax \in D_B \wedge Bx \in D_A\}$ gilt,

(b) dies ein dichter linearer Teilraum von $(D_A, \| \quad \|_{D_A})$ und $(D_B, \| \quad \|_{D_B})$ sowie von $(E, \| \quad \|)$ ist,

(c) für alle $x \in D$ gilt $ABx = BAx$, und

(d) $(\lambda - A)^{-1}(\mu - B)^{-1}x = (\mu - B)^{-1}(\lambda - A)^{-1}x$ für *alle* $x \in E$, $\lambda \in \rho(A)$ und $\mu \in \rho(B)$.

Hinweis: Für $\lambda_0 \in \rho(A)$ ist $(\lambda_0 - A)^{-1} : (E, \| \quad \|) \to (D_A, \| \quad \|_{D_A})$ ein Isomorphismus von Banachräumen. (Warum ?)

Bitte wenden!

**Problem 8 (7+6=13 P.)** Es seien $(T_A(t))_{t\geq 0}$ und $(T_B(t))_{t\geq 0}$ Kontraktionshalbgruppen auf einem Banachraum $E$ mit Generatoren $A : E \supset D_A \to E$ bzw. $B : E \supset D_B \to E$. Für alle $x \in E$ gelte

$$(I - A)^{-1}(I - B)^{-1}x = (I - B)^{-1}(I - A)^{-1}x.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$T(t) := T_A(t)T_B(t) \qquad (t \geq 0)$$

eine Kontraktionshalbgruppe definiert wird, und bestimmen Sie deren Generator.

Hinweis: Benutzen Sie zuerst Aufgabe 19 und die Yosida-Approximationen, um die Vertauschungsrelation $[T_A(t), T_B(s)] = 0$ zu zeigen.

**Abgabe:** 26.06.2018, in der Vorlesung,
**Besprechung:** 02.07.2018