Nachtrag zur Vorlesung PDE I

4. Inhomogene Gleichungen und semilineare Probleme

Generalvoraussetzungen im gesamten Kapitel:

- E sei ein B-Raum und
- $A : E \supset D_A \to E$ ein linearer Operator, der eine Kontraktionshalbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ erzeugt.

Erinnerung:

(1) In diesem Fall ist der Definitionsbereich D_A ein dichter linearer Teilraum von E.

(2) A ist abgeschlossen, das heißt: Der Graph $G_A \subset E \times E$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $E \times E$

(3) Das Cauchy-Problem $u(0) = u_0$ für die homogene lineare Gleichung $\frac{du}{dt}(t) = Au(t)$ ist für $u_0 \in D_A$ im klassischen Sinne wohlgestellt. Die Lösung ist gegeben durch $u(t) = T(t)u_0$.

(4) Kontraktionshalbgruppe heißt

$(T(t))_{t \geq 0}$ ist eine C^0-HG.

(i) $T(0) = I$; $T(t+s) = T(t)T(s)$.

(ii) $\forall\, u_0 \in E$ ist $u : [0,\infty) \to E$, $t \mapsto u(t) = T(t)u_0$ stetig. („Starke Stetigkeit")

(iii) $\forall\, t \geq 0$ ist $\|T(t)\|_{E \to E} \leq 1$. (Kontraktionseigenschaft, nicht strikt!)

(In diesem Kap. werde ich mich zur Vereinfachung der Darstellung auf Kontraktionshalbgruppen beschränken. Die meisten Aussagen lassen sich ohne wesentliche Schwierigkeit auf C^0-Halbgruppen verallgemeinern.)

(5) Nach dem Satz von Lumer-Phillips ist die Voraussetzung an A äquivalent dazu, dass A dicht definiert und m-dissipativ ist. Letzteres bedeutet wiederum:

(i) A ist dissipativ, d.h. zu jedem $x \in D_A$ existiert ein (stetiges lineares Funktional)

$$y \in J(x) := \{ y \in E' : \|y\|_{E'}^2 = \|x\|_E^2 = y[x] \},$$

(dem "Subdifferenzial von x") so dass $\operatorname{Re} y[Ax] \le 0$ gilt. Äquivalent hierzu ist die Eigenschaft: $\forall x \in D_A$ und $\forall \lambda > 0$ gilt $\|(\lambda - A)x\| \ge \lambda \|x\|$, die insbes. die Injektivität von $\lambda I - A : D_A \to E$ umfasst.

(ii) Es gibt ein $\lambda_0 > 0$, so dass $\lambda_0 I - A : D_A \to E$ surjektiv ist. ("Maximale" oder kurz: "m-Dissipativität"; in diesem Fall gilt bereits, dass $(0, \infty) \subset \rho(A)$, der Resolventenmenge von A.)

4.1 Inhomogene Gleichungen

Wir untersuchen das Cauchy-Problem

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Au(t) + f(t) \\ u(t=0) &= u_0 \end{aligned}\right\} \text{(CP)}$$

für die inhomogene lineare Gleichung. Wie gehabt ist also $u_0 \in E$ (oft, insbes. für "klassische Wohlgestelltheit": $u_0 \in D_A$) der Anfangswert (die "Cauchy-Daten"), und hinzu kommt die Inhomogenität

$$f : [0, T] \longrightarrow E \qquad \text{(stets in diesem Abschnitt)},$$
$$T > 0$$

von der wir mindestens $f \in L^1((0,T), E)$ voraussetzen, oft stärker: $f \in C([0,T], E)$.

Zunächst suchen wir "klassische Lösungen"

$$u \in C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], E)$$

von (CP), für die die Dgl. mit klassischen Ableitungen $\forall\, t \in [0,T]$ erfüllt ist. Hierfür müssen wir offenbar $u_0 \in D_A$ voraussetzen. Ganz ähnlich wie bei gewöhnlichen Dgln. gilt eine "Variation der Konstanten"-Formel:

Lemma 1 ("Duhamelsches Prinzip") Es seien $u_0 \in D_A$, $f \in C([0,T], E)$ und u eine klassische Lösung von (CP). Dann gilt $\forall\, t \in [0,T]$:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) f(s)\,ds. \qquad (D)$$

Bew.: Ist klar für $t=0$. Für $t \in (0,T]$ und $s \in [0,t]$ setzen wir

$$w(s) := T(t-s)u(s).$$

Da $u \in C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], E)$, können wir w wie nach der Produktregel differenzieren und erhalten

$$\frac{dw}{ds}(s) = -T(t-s)Au(s) + T(t-s)\frac{du}{ds}(s)$$

$$\underset{\text{Dgl.}}{=} -T(t-s)Au(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) = T(t-s)f(s)$$

Integration von 0 bis t ergibt nach dem Hauptsatz

$$\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds = w(t) - w(0) = u(t) - T(t)u(0),$$

wg. der Anfangsbed. $u(0) = u_0$ also die Beh..

Folgerung: Eine Lösung $u \in C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], E)$ von (CP) ist eindeutig bestimmt.

Unter welchen Voraussetzungen gilt die Äquivalenz von Cauchy-Problem (CP) und Integralgleichung (D), sagen wir im Rahmen des Begriffs klassischer

Lösungen? (Dazu fehlt: (D) $\Longrightarrow$ (CP) und

$u \in C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], E)$!)

Hierfür können wir natürlich voraussetzen, dass

$$u_0 \in D_A \quad (\Longrightarrow u_h(t) = T(t)u_0 \in \underbrace{C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], E)})$$

und $f \in C([0,T], D_A)$ $\left(\Longrightarrow \int_0^t T(t-s) f(s) ds \in \quad ,\right)$, sogar in $C^1([0,T], D_A)$

und die Dgl. folgt durch Ableiten. Das erscheint allerdings etwas groß. Andererseits ist die Voraussetzung

$$u_0 \in D_A \quad \text{und} \quad f \in C([0,T], E)$$

nicht ausreichend, wie das folgende Bsp. zeigt:

Bsp.: Sei $(T(t))_{t \geq 0}$ eine Gruppe von Isometrien, $u_0 = 0$, $y \in E \setminus D_A$ und $f(t) = T(t)y$. Dann ist für alle $t \geq 0$ $f(t) \notin D_A$, denn sonst erhalten wir mit

$$y = T(-t) \underbrace{T(t)y}_{\in D_A, \text{ nach Annahme}} \in D_A$$

unmittelbar einen Widerspruch. Weiter ist für u definiert durch (D):

$$u(t) = \int_0^t T(t-s) \underbrace{T(s)y}_{f(s)} ds = T(t) \cdot t \cdot y \notin D_A,$$

und also auch $u \notin C([0,T], D_A)$.

Um hier etwas genaueres aussagen zu können, sollten wir den "Duhamel-Term" $\left(= \int_0^t T(t-s) f(s) ds\right)$ etwas genauer untersuchen.

Lemma 2: Sei $u_0 \in E$ und $f \in L^1((0,T),E)$. Dann wird durch die Duhamel-Formel (D) eine Funktion $u \in C([0,T],E)$ definiert, und es gilt die Abschätzung
$$\sup_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_E \le \|u_0\|_E + \|f\|_{L^1((0,T),E)}.$$

Bew.: Sei $u_h(t) := T(t)u_0$. Da $(T(t))_{t\ge 0}$ stark stetig ist, gilt $u_h \in C([0,T],E)$, und weil wir "Kontraktionshalbgruppe" grundsätzlich vorausgesetzt haben, gilt auch
$$\|u_h(t)\|_E \le \|T(t)\|_{E\to E} \|u_0\|_E \le \|u_0\|_E.$$

Ferner haben wir (Dreiecksungleichung für Integrale)
$$\left\| \int_0^t T(t-s) f(s) ds \right\|_E \le \int_0^t \|T(t-s) f(s)\|_E ds$$
$$\le \int_0^T \|f(s)\|_E ds = \|f\|_{L^1((0,T),E)},$$
was den zweiten Teil der behaupteten Abschätzung ergibt. Bleibt die Stetigkeit von u_p zu zeigen für
$$u_p(t) := \int_0^t T(t-s) f(s) ds :$$

$$\| u_p(t+h) - u_p(t) \|_E \le \| \int_0^t (T(h)-I)\, T(t-s) f(s)\, ds \|_E + \| \int_t^{t+h} T(h) T(t-s) f(s) ds \|_E$$

$$\le \| (T(h)-I) \int_0^t T(t-s) f(s) ds \|_E + \int_t^{t+h} \| f(s) \|_E \, ds$$

Der erste Summand verschwindet für $h \to 0$, da $(T(t))_{t\ge 0}$ stark stetig und $\int_0^t T(t-s) f(s) ds \in E$ ist, der zweite nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz, da $f \in L^1((0,T), E)$.

$f \in L^1((0,T), E)$ reicht also aus, um $u_p \in C([0,T], E)$ (u_p wie im vorhergehenden Beweis) zu folgern. Dann sollte doch auch $f \in L^1((0,T), D_A)$ für $u_p \in C([0,T], D_A)$ ausreichen – das war in dem Bsp. oben ja gerade das Problem gewesen. Und tatsächlich gilt:

Satz 1: Es seien $u_0 \in D_A$ und $f \in C([0,T], E)$. Ferner genüge f einer der folgenden Bedingungen:

(i) $f \in L^1((0,T), D_A)$ oder

(ii) $f \in W^{1,1}((0,T), E)$.

Dann ist u, definiert durch (D), in $C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], E)$ und löst das Cauchy-Problem (CP) im klassischen Sinn.

Bew.: Wir wissen, dass $t \mapsto T(t)u_0$ in der angegebenen Funktionenklasse liegt und das (CP) für die homogene lineare Gleichung löst. Daher können wir o. E. $u_0 = 0$ annehmen und haben

$$u(t) = \int_0^t T(t-s) f(s)\,ds \underset{\sigma = t-s}{=} \int_0^t T(\sigma) f(t-s)\,ds.$$

Da $f \in C([0,T],E)$, ist $u \in C([0,T],E)$ klar.

1. <u>Wir zeigen $u \in C^1([0,T],E)$.</u> Dazu sei $t \in [0,T]$ und h so, dass auch $t+h \in [0,T]$.

Fall (i): <u>$f \in L^1((0,T),D_A)$.</u> Wir schreiben (1. Darst. oben!)

$$\frac{1}{h}(u(t+h)-u(t)) = \frac{1}{h}\int_0^t (T(t+h-s) - T(t-s))\, f(s)\,ds$$

$= 0$ im Fall $t=0$

$$+ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{h}(T(t+h) - T(t)) \int_0^t T(-s) f(s)\,ds$$

$$+ \quad T(t+h) \cdot \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(-s) f(s)\,ds \quad =: I_h + II_h$$

Aufgrund der Voraussetzung $f \in L^1((0,T),D_A)$ ist $\int_0^T T(-s) f(s)\,ds \in D_A$.

Damit existiert der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} I_h = A\,T(t) \int_0^t T(-s) f(s)\,ds = \int_0^t T(t-s) \underbrace{Af(s)}_{\in L^1((0,T),E)}\,ds$$

woran ablesbar ist, dass dieser Beitrag in $C([0,T],E)$ liegt. Ferner existiert

$$\lim_{h\to 0} II_h = T(t)\,T(-t) f(t) = f(t), \text{ und } f \in C([0,T],E)$$

Hauptsatz gilt nach Voraussetzung.

Also gilt $u' \in C([0,T],E)$, d.h. $u \in C^1([0,T],E)$.

Fall (ii): $f \in W^{1,1}((0,T),E)$. Wir benutzen die 2. Darstellung oben und schreiben

$$\frac{1}{h}(u(t+h)-u(t)) = \frac{1}{h}\int_0^t T(s)(f(t+h-s)-f(t-s))\,ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)\, f(t+h-s)\,ds$$

$$= \int_0^t T(s) \underbrace{\frac{1}{h}(f(t+h-s)-f(t-s))}_{\to f'(t-s) \text{ pktw. f.ü. und}}\,ds + \underbrace{\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)\, f(t+h-s)\,ds}_{\to T(t)f(0) \in C([0,T],E) \text{ Hauptsatz}}$$

in $L^1((0,T),E)$, siehe Diskussion zum Hauptsatz

Also $\exists$ der Grenzwert (für $t=0$, $t=T$ einseitig!)

$$u'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t)) = \int_0^t T(s)f'(t-s)\,ds + T(t)f(0),$$

woraus wir $u' \in C([0,T],E)$, d.h. $u \in C^1([0,T],E)$ ablesen.

2. Wir zeigen: $u \in C([0,T],D_A)$ und löst die Dgl.

Für $t \in [0,T)$ und $0 \le t+h < T$ haben wir

$$\frac{1}{h}(T(h)-I)u(t) = \frac{1}{h}\left(\int_0^t T(t+h-s)f(s)\,ds - \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds\right)$$

$$= \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t)) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} u'(t) - f(t) \quad \text{(Schritt 1, Hauptsatz)}$$

Für $t=T$: Beachte, dass A abgeschlossen ist.

Also ist $u(t) \in D_A$ und $u \in C([0,T],D_A)$; ferner gilt $Au(t) = u'(t) - f(t)$. ($u(0)=0$ ist klar!) □

Wir müssen also deutlich stärkere Voraussetzungen fordern, wenn durch (D) nicht nur eine stetige Funktion mit $u(0)=u_0$ definiert werden soll, sondern eine klassische Lösung von (CP). Stellt sich also die Frage, ob man den Lösungs- bzw. Wohlgestelltheitsbegriff in sinnvoller Weise abschwächen kann, um diese Lücke zu schließen. Eine Möglichkeit dafür ist das Konzept der <u>Extrapolation</u>.

<u>Satz 2</u>: Es sei $A: E \supset D_A \to E$ dicht definiert und m-dissipativ. Dann existieren ein Banachraum $\overline{E}$ und ein ebenfalls m-dissipativer Operator $\overline{A}$ auf $\overline{E}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $E \subset \overline{E}$ und E ist dicht in $\overline{E}$;

(ii) $\forall x \in E$ ist die Norm von x in $\overline{E}$ gegeben durch $|||x||| := \|(I-A)^{-1}x\|_E$;

(iii) $D_{\overline{A}} = E$ mit äquivalenten Normen;

(iv) $\overline{A}x = Ax \quad \forall x \in D_A$.

Schließlich sind $\overline{E}$ und $\overline{A}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bew.: Für $x \in E$ setzen wir $|||x||| := \|(I-A)^{-1}x\|_E$. Da $(I-A)^{-1}: E \to D_A \subset E$ linear und injektiv ist, wird hierdurch eine Norm auf E definiert. Beh. (ii) des Satzes ist dann per definitionem erfüllt.

Nun definiert man $\bar{E}$ als die Vervollständigung von E bezüglich $|||\ |||$.

⌈ Vervollständigung eines normierten Vektorraumes F:

Auf dem VR CF aller Cauchy-Folgen $x = (x_n)_n$ in F definiert man die Halbnorm

$$p(x) := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_F ,$$

setzt $N := \{x \in CF : p(x) = 0\}$, was wiederum ein Vektorraum ist, bildet den Quotienten $CF/N =: \bar{F}$ und versieht diesen mit der Quotientennorm

$$\|[x]\|_{\bar{F}} := \inf_{x \in [x]} p(x) .$$

So entsteht ein B-Raum, in den F durch die Identifizierung von $x_0 \in F$ mit der konstanten Folge $x = (x_0, x_0, \ldots)$ eingebettet ist. F liegt dann dicht in $\bar{F}$, und $\bar{F}$ ist bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmt. –

Beweis dieser Aussagen z.B. in: K. Yosida, Functional Analysis, Sec. I.10 ("The completion") ⌋

Dann ist $\bar{E}$ ein B-Raum und $E \subset \bar{E}$ ein dichter linearer Teilraum (Teil. (i) des Satzes). Aus

$$A(I-A)^{-1}x = (A-I+I)(I-A)^{-1}x = x + (I-A)^{-1}x$$

folgt

$$|||Ax||| = \|A(I-A)^{-1}x\|_E \leq \|x\|_E + \underbrace{\|(I-A)^{-1}x\|_E}_{\leq \|x\|_E,\ \text{da } A \text{ dissipativ ist}} \leq 2\|x\|_E$$

D.h.: $A : (E, \| \|_E) \supset D_A \longrightarrow (\overline{E}, ||| \; |||)$ ist stetig und kann daher fortgesetzt werden zu einem stetigen linearen Operator $\tilde{A} : (E, \| \|_E) \longrightarrow (\overline{E}, ||| \; |||)$.

Nun definieren wir

$$\overline{A} : \overline{E} \supset D_{\overline{A}} := E \longrightarrow \overline{E} \quad , \quad \overline{A}x = \tilde{A}x \; (= Ax, \text{ falls } x \in D_A).$$

Dann sind auch die Aussagen (iii) und (iv) geklärt, und die "Eindeutigkeit bis auf isom. Isomorphie" ergibt sich aus der Konstruktion der Vervollständigung und der Dichtheit von $D_A \subset E$ bzw $E \subset \overline{E}$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{A}$ m-dissipativ ist:

(a) Dissipativität: Sei $\lambda > 0$, $u \in D_A$ und $v := (I-A)^{-1}u$.

Dann ist: $|||(\lambda I - A)u||| = \|(\lambda I - A)v\|_E \underset{\nearrow}{\geq} \lambda \|v\|_E = \lambda |||u|||$.

weil A dissipativ ist!

Weil $\tilde{A} : E \to \overline{E}$ die stetige Fortsetzung von A ist, folgt für $u \in E$ ebenfalls

$$\lambda |||u||| \leq |||(\lambda I - \tilde{A})u||| = |||(\lambda I - \overline{A})u|||,$$

und damit ist $\overline{A} : \overline{E} \supset D_{\overline{A}} = E \longrightarrow \overline{E}$ dissipativ.

(b) Für die m-Dissipativität reicht es zu zeigen, dass $I - A : E \to \overline{E}$ surjektiv ist. Dazu sei $y \in \overline{E}$ gegeben und $(y_n)_n$ eine Folge in $E = D_{\overline{A}}$ mit $\lim_{n\to\infty} |||y - y_n||| = 0$ sowie $u_n = (I-A)^{-1} y_n$. Dann ist $u_n \in D_A$ und

$$\| u_n - u_m \|_E = \| (I-A)^{-1}(y_n - y_m) \|_E = ||| y_n - y_m ||| \longrightarrow 0 \ (n,m \to \infty)$$

also $(u_n)_n$ Cauchy in E und somit konvergent. Sei $u := E\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n$. Dann ist

$$(I-\bar{A})u = \bar{E}\text{-}\lim_{n\to\infty} (I-\bar{A})u_n = \bar{E}\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Fazit: $I-\bar{A} : E \to \bar{E}$ ist surjektiv und somit $\bar{A}$ m-dissipativ. □

Folgerung 1: Ist ~~...~~ $u_0 \in E$ mit $\bar{A}u_0 \in E$, so ist $u_0 \in D_A$ und $Au_0 = \bar{A}u_0$.

Bew.: Sei $y = (I-\bar{A})u_0 \in E$. Weil A m-dissipativ ist, gibt es ein $z \in D_A$ mit $(I-A)z = y = (I-\bar{A})u_0$, also $(I-\bar{A})(z-u_0) = 0$. Da $\bar{A}$ dissipativ ist, ist insbesondere $I-\bar{A}$ injektiv, also $u_0 = z \in D_A$, und für solche u_0 ist $\bar{A}u_0 = Au_0$.

Bsp.: Sei $E = L^2(\mathbb{R}^n)$, $A : D_A \to E$ der Laplace-Operator mit Definitionsbereich $D_A = H^2(\mathbb{R}^n) = (I-A)^{-1}L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\bar{E}$ die Vervollständigung von $L^2(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm

$$||| u ||| = \| (I-\Delta)^{-1} u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| u \|_{H^{-2}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\langle\xi\rangle^{-2} |\hat{u}(\xi)|)^2 \, d\xi \right)^{1/2},$$

also $\overline{E} = H^{-2}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{H^{-2}} < \infty \}$ und

$\overline{A} : E = L^2(\mathbb{R}^n) \to \overline{E} = H^{-2}(\mathbb{R}^n)$, $u \mapsto \Delta u$ (distributionelle Ableitungen bzw. Fouriermultiplikator). Hier kann man $\overline{E}$ tatsächlich als Abschluß von $E = L^2(\mathbb{R}^n)$ in $S'(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der H^{-2}-Norm auffassen. Wenn ein "Grundraum" wie $S'(\mathbb{R}^n)$ nicht zur Verfügung, muß man sich bei der Tat der Konstruktion der Vervollständigung bedienen.

Da $\overline{A} : \overline{E} \supset D_{\overline{A}} = E \to \overline{E}$ dicht definiert und m-dissipativ ist, erzeugt $\overline{A}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf $\overline{E}$, die mit $(\overline{T}(t))_{t \geq 0}$ bezeichnet sei. Für $u_0 \in E$ ist dann $\overline{T}(t) u_0 = T(t) u_0$, denn auf D_A gilt $\overline{A}|_{D_A} = A$, und eine C^0-Halbgruppe ist durch ihren Generator eindeutig festgelegt. Für die Lösung des Cauchy-Problems

$$\frac{du}{dt} = \overline{A}u + f \; ; \qquad u(t=0) = u_0 \qquad (\overline{CP})$$

erhalten wir:

Folgerung 2: Sei $u_0 \in E$, $f \in C([0,T], E)$ und

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) f(s) ds . \qquad (D)$$

Dann ist $u \in C([0,T], E) \cap C^1([0,T], \overline{E})$ die eindeutige Lösung von $(\overline{CP})$.

Bew.: Wir haben $u_0 \in E = D_{\bar{A}}$ und $f \in C([0,T], E) =$
$C([0,T], D_{\bar{A}}) \subset C([0,T], \bar{E}) \cap L^1((0,T), D_{\bar{A}})$. Die Voraussetzungen von Satz 1 sind also gegeben, dieser liefert die eindeutige Lösung

$$u(t) = \bar{T}(t)u_0 + \int_0^t \bar{T}(t-s)f(s)\,ds$$

in der genannten Funktionenklasse. Wg. $\bar{T}(t)|_E = T(t)$ (Vorbemerkung) stimmt dies mit u wie in (D) überein.

Folgerung 3: Sei $u_0 \in E$, $f \in C([0,T], E)$ und u gemäß (D). u genüge einer der folgenden Bedingungen:

$$\text{(i)} \quad u \in C([0,T], D_A) \ ; \ \text{(ii)} \ u \in C^1([0,T], E).$$

Dann ist $u \in C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], E)$ und löst (CP).

Bew.: (i) Sei $u \in C([0,T], D_A)$. Nach Folgerung 2 ist

$$\frac{du}{dt} = \bar{A}u + f \overset{\downarrow}{=} Au + f \in C([0,T], E). \text{ Also ist}$$

$u \in C^1([0,T], E)$ und löst (CP). ($u(0) = u_0$ ist klar).

(ii) Ist $u \in C^1([0,T], E)$, also $\frac{du}{dt} \in C([0,T], E)$, so haben wir nach Folgerung 2

$$C([0,T], E) \ni \frac{du}{dt} = \bar{A}u + f \Rightarrow \bar{A}u \in C([0,T], E). \text{ Nach}$$

Folgerung 1 ist dann $\forall t \in [0,T]$: $u(t) \in D_A$ und $\bar{A}u(t) = Au(t)$. D.h. $Au \in C([0,T], E)$ und damit $u \in C([0,T], D_A)$ und löst (CP).

Bew.: Zu $f \in L^1((0,T),E)$ wählen wir eine Folge (f_n) in $C([0,T],E)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1((0,T),E)}$ und definieren

$$u_n(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) f_n(s)\,ds$$

Dann gilt nach Folgerung (2): $u_n \in C([0,T],E) \cap C^1([0,T],\overline{E})$

$$u_n(t=0) = u_0 \quad \text{und} \quad \frac{du_n}{dt} = \overline{A}u_n + f_n .$$

Integration der Dgl. ergibt

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t \overline{A}u_n(s) + f_n(s)\,ds .$$

Nach Lemma (2) gilt $\sup_{0\le t\le T} \|u_n(t) - u(t)\|_E \le \|f_n - f\|_{L^1_T(E)} \to 0$,

d.h. $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ mit glm. Konvergenz in E und

daher auch $\sup_{0\le t\le T} \|\overline{A}u_n(t) - \overline{A}u(t)\|_{\overline{E}} \le \sup_{0\le t\le T} \|u_n(t) - u(t)\|_E \to 0$

also $\lim_{n\to\infty} \overline{A}u_n(t) = \overline{A}u(t)$ mit glm. Konvergenz in $\overline{E}$.

Grenzübergang in $\overline{E}$ ergibt

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \underbrace{\overline{A}u(s)}_{\in C([0,T],\overline{E}) \subset L^1_T(\overline{E})} + \overbrace{f(s)}^{\in L^1_T(E) \subset L^1_T(\overline{E})}\,ds$$

Der Integrand ist also in $L^1((0,T),\overline{E})$ und der Hauptsatz ergibt: $u \in W^{1,1}((0,T),\overline{E})$ und es gilt

$$u'(t) = \overline{A}u(t) + f(t) \quad \text{für fast alle } t \in [0,T].$$

Bisher haben wir für den Schluss $(D) \Rightarrow (CP)$ stets (16)
vorausgesetzt, dass $f \in C([0,T], E)$. Schwächen wir dies ab
zu $f \in L^1((0,T), E)$, werden wir

(a) zu einem schwächeren Lösungsbegriff übergehen
müssen und/oder

(b) dies durch zusätzliche Voraussetzungen an
u ausgleichen müssen (vgl. das Argument
zu Folgerung 3).

Folgendes können wir erreichen:

<u>Satz</u> 3: Es seien $u_0 \in E$, $f \in L^1((0,T), E)$ und

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) f(s) ds.$$

Darüber hinaus gelte

$$(1)\ u \in L^1((0,T), D_A) \quad \text{oder} \quad (2)\ u \in W^{1,1}((0,T), E).$$

Dann ist $u \in L^1((0,T), D_A) \cap W^{1,1}((0,T], E)$ und löst

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t) \quad \text{für fast alle } t \in [0,T],$$

$$u(t=0) = u_0.$$

Bem.: (1) Lösungen dieses Typs werden manchmal
als starke Lösungen bezeichnet.
(2) $u \in C([0,T], E)$ und $u(0) = u_0$ sind bereits aus
Lemma 2 bekannt und gelten ohne die Voraussetzungen an u!

Wenn jetzt: $u \in L^1((0,T), D_A)$

$\Longrightarrow$ rechte Seite $= Au + f \in L^1((0,T),E)$, also $u' \in L^1((0,T),E)$

und damit $u \in W^{1,1}((0,T),E)$.

Wenn andererseits: $u \in W^{1,1}((0,T),E)$

$\Longrightarrow$ linke Seite $= \frac{du}{dt} \in L^1((0,T),E)$

$\Longrightarrow$ $\bar{A}u \in L^1((0,T),E) \underset{\text{Folgerung 1}}{\Longrightarrow} Au = \bar{A}u \in L^1((0,T),E)$,

da $f \in L^1((0,T),E)$

und aus letzterem können wir wiederum $u \in L^1((0,T),D_A)$ folgern. $\square$

Bem.: "Umgekehrt" kann man zeigen:

Ist $u_0 \in E$, $f \in L^1((0,T),E)$, $u \in L^1((0,T),D_A)$ ~~oder~~ $\cap\, W^{1,1}((0,T),E)$

eine Lösung von $u(t=0) = u_0$ und

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) = f(t) \text{ für fast alle } t \in [0,T].$$

Dann gilt $u(t) = \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds + T(t) u_0$ (D).

Bew.: Cazenave-Haraux; Introduction to semilinear evolution equations, Prop. 4.1.9.

Wir sehen: Bei schwachen Regularitäten der Daten kann man sehr "sophisticated" Diskussionen führen um die Äquivalenz von Differenzial- und Integralgleichung. Das führt zu sukzessiven Abschwächungen des Lösungs- (und Wohlgestelltheits-) begriffs: Von "klassischen Lösungen" über "starke Lösungen" wie in Satz 3 zu "schwachen Lösungen", wie die Lösungen von ($\overline{CP}$) in Folgerung 2 entsprechend genannt werden. Am Ende stehen meist stetige Lösungen $u \in C([0,T], E)$ der Integralgleichung (D). Diese werden dann als "milde Lösungen" bezeichnet.