4.2 Semilineare Probleme

Zu gegebenen $u_0 \in E$, $T > 0$ und einer nichtlinearen Funktion $F: E \to E$ suchen wir eine Lösung u des Cauchy-Problems

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + F(u(t)), \quad u(t=0) = u_0, \qquad \text{(CP)}$$

dabei E und A gemäß der allgemeinen Voraussetzung.

Von der Funktion F nehmen wir in diesem Abschnitt stets an, dass sie Lipschitz-stetig auf beschränkten Teilmengen von E ist, d.h. dass gilt:

$$\forall R > 0 \; \exists L = L_F(R), \text{ so dass } \|F(u) - F(v)\|_E \le L \|u - v\|_E$$

$$\forall u, v \in B_R(0) \subset E.$$

Wir wählen $L_F(R) := \sup \left\{ \frac{\|F(u) - F(v)\|_E}{\|u - v\|_E} : u, v \in B_R(0), u \neq v \right\}$, so dass $L_F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton steigend ist.

In erster Linie fragen wir (für ein $T > 0$) nach Lösungen $u \in C([0,T], E)$ der Fixpunkt- bzw. Integralgleichung

$\Lambda u = u$ mit

$$\Lambda u(t) := T(t) u_0 + \int_0^t T(t-s) F(u(s)) \, ds \qquad \text{(D)}.$$

Über den Zusammenhang dieser Gleichung mit dem Cauchy-Problem (CP) wissen wir nach Abschnitt 4.1:

- Ist $u_0 \in D_A$ und $u \in C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], E)$ eine klassische Lösung von (CP), so löst u die Fixpunktgleichung $\Lambda u = u$.
  (Folgt aus Lemma 1 in Abschnitt 4.1, wenn wir beachten, dass unter den genannten Voraussetzungen die Inhomogenität $f := F \circ u$ stetig ist.)
- Wenn für $u \in C([0,T], E)$ gilt $\Lambda u = u$, so ist $u \in C([0,T], E) \cap C^1([0,T], \overline{E})$ und löst das Problem

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + F(u(t)), \qquad u(t=0) = u_0 \in E \quad (\overline{CP}).$$

("Schwache" Lösung, etwas irritierende Bezeichnung; dies gilt nach Folgerung 2 (aus dem Satz 2 über Extrapolation im letzten Abschnitt), es ist lediglich $u_0 \in E$ und ebenfalls $F \circ u \in C([0,T], E)$ erforderlich.)

Wir beginnen mit einer einfachen Eindeutigkeitsaussage:

Lemma 1: Es seien $T > 0$, $u_0 \in E$ und $u, v \in C([0,T], E)$ zwei Lösungen der FP-Gleichung $\Lambda u = u$ (mit demselben u_0!). Dann gilt $u = v$.

Bew.: Mit $R := \max\left(\|u\|_{L^\infty([0,T],E)}, \|v\|_{L^\infty([0,T],E)}\right)$

haben wir

$$\|u(t)-v(t)\|_E \leq \int_0^t \|F(u(s))-F(v(s))\|_E \, ds$$
$$\leq L(R) \int_0^t \|u(s)-v(s)\|_E \, ds$$

Aus dem Gronwall-Lemma

$$\varphi(t) \leq C + \int_0^t g(s)\varphi(s)\,ds \implies \varphi(t) \leq C \cdot \exp\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)$$

(→ Übungen) erhalten wir mit $C=0$ und $\varphi(t) = \|u(t)-v(t)\|_E$, dass $u=v$ gilt. □

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Integralgleichg.:

Satz 1: Sei $u_0 \in E$ und $F: E \to E$ Lipschitz-stetig auf beschränkten Teilmengen mit Lipschitz-Konstante $L=L(R)$. Dann gibt es ein $T = T(\|u_0\|, F) > 0$ und eine eindeutige Lösung $u \in C([0,T], E)$ von $\Lambda u = u$ (mit Λ wie in (D)).

Bew.: Die Eindeutigkeit im gesamten Raum $C([0,T],E)$ folgt aus Lemma 1. Sei $\|u\|_\infty := \sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_E$ und

$$B_{R,T} := \{u \in C([0,T],E) : \|u\|_\infty \leq R\}.$$

Wir werden zeigen, dass für geeignete Wahl von R und T die Abbildung $\Lambda: B_{R,T} \to B_{R,T}$ eine Kontraktion ist. (Dann folgt die Beh. aus dem Banachschen Fixpunktsatz, denn $B_{R,T}$ ist eine abgeschlos-

einer metrischer Teilraum des B-Raumes $(C([0,T], E), \| \|_\infty)$ (22)
und daher vollständig.)

Dazu schätzen wir ab:

$$\| \Lambda u \|_\infty \leq \| T u_0 \|_\infty + \| \int_0^{\cdot} T(\cdot - s) F(u(s)) ds \|_\infty$$

$$\leq \| u_0 \|_E + \int_0^T \| F(u(s)) \|_E \, ds ,$$

wobei wir die Dreiecksungleichung benutzt haben und ebenso die Tatsache, dass $(T(t))_{t \geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe ist. Für den zweiten Beitrag verwenden wir die Lipschitz-Eigenschaft von F und schreiben

$$\| F(u(s)) \|_E \leq \| F(u(s)) - F(0) \|_E + \| F(0) \|_E$$

$$\leq L(\| u(s) \|_E) \| u(s) \|_E + \| F(0) \|_E$$

$$\leq R \, L(R) + \| F(0) \|_E ,$$

letzteres, wenn $u \in B_{R,T}$. Insgesamt für $u \in B_{R,T}$

$$\| \Lambda u \|_\infty \leq \| u_0 \|_E + T \, (R \, L(R) + \| F(0) \|_E).$$

Nehmen wir $v \in B_{R,T}$ und $\Lambda v(t) = T(t) u_0 + \int_0^t T(t-s) F(v(s)) ds$ hinzu, erhalten wir für die Differenz

$$\| \Lambda u - \Lambda v \|_\infty \leq T \, L(R) \, \| u - v \|_\infty .$$

Die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes sind erfüllt, wenn (i) $\|u_0\|_E + TR\left(L(R) + \frac{\|F(0)\|_E}{R}\right) \leq R$

und (ii) $TL(R) \leq \frac{1}{2}$.

Wir wählen $R = 2\|u_0\|_E + \|F(0)\|_E$. Dann ist $\|u_0\|_E \leq \frac{R}{2}$

und $TR\left(L(R) + \frac{\|F(0)\|}{R}\right) \leq TR(L(R)+1) \ \left(\overset{!}{\leq} \frac{1}{2}\right)$, so

dass die Wahl $T := \frac{1}{2(L(R)+1)}$ für (i) und (ii) ausreicht. □

Bem.: Die durch einmalige Anwendung des Fixpunktsatzes gewährleistete Lebensdauer ist also

$$T = T(\|u_0\|_E, F) = \left(2\left(L\left(2\|u_0\|_E + \|F(0)\|_E\right) + 1\right)\right)^{-1}.$$

Im Fall lediglich lokaler Existenz (in t) lässt sich hieraus eine untere Schranke für die "blow-up-rate" gewinnen. (In Einzelfällen erweist sich diese sogar als "scharf", wie wir in den Übungen anhand einer gewöhnlichen Dgl. diskutieren werden.) Genauer gilt:

<u>Satz</u> 2 Es sei $F: E \to E$ Lipschitz-stetig auf beschränkten Teilmengen $B_R(0) \subset E$ mit Lipschitz-Konstanten $L(R)$, so dass $L: (0,\infty) \to (0,\infty)$ monoton steigt. Dann gibt es eine Funktion $T^*: E \to (0,\infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Zu jedem $u_0 \in E$ existiert ein $u \in C([0, T^*(u_0)), E)$, so dass u für alle $T \in (0, T^*(u_0))$ die eindeutige Lösung von $\Lambda u = u$ in $C([0,T], E)$ ist.

(b) Für alle $t \in [0, T^*(u_0))$ gilt die Abschätzung

$$2L(\|F(0)\|_E + 2\|u(t)\|_E) + 2 \geq \frac{1}{T^*(u_0) - t}, \qquad (LB)$$

(c) insbesondere besteht die Alternative

(i) $T^*(u_0) = \infty$ <u>oder</u> (ii) $T^*(u_0) = \infty$ und $\lim_{t \to T^*(u_0)} \|u(t)\|_E = \infty$.

Bem. zu (c): Im Fall (i) sprechen wir von globaler Existenz, im Fall (ii) von "blow-up" in endlicher Zeit; weitere Möglichkeiten gibt es nicht. Will man von lokaler Existenz auf globale schließen, so reicht also dazu der Beweis einer a-priori-Abschätzung der Form $\|u(t)\|_E \leq \varphi(t)$ mit einer Funktion $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ bereits aus.

Bew.: Da $L:(0,\infty)\to(0,\infty)$ eine monoton steigende Funktion ist, folgt (c) aus (b).

Zu (a): Für $u_0\in E$ setzen wir $\mathcal{T}(u_0):=\{T>0: \exists u\in C([0,T],E)$ so dass $\Lambda u=u$ auf $[0,T]\}$ und $T^*(u_0):=\sup \mathcal{T}(u_0)$. Satz 1 ergibt $T^*(u_0)>0$, also $T^*(E)\subset(0,\infty]$, wie behauptet. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 1 können wir die lokalen Lösungen $u\in C([0,T],E)$ für $T\in\mathcal{T}(u_0)$ zu einer Maximal-Lösung $u\in C([0,T^*(u_0)),E)$ zusammenfügen, und mehr ist in (a) nicht ausgesagt.

Zu (b): Für $T^*(u_0)=\infty$ ist (LB) als $L(\|F(0)\|+2\|u(t)\|_E)\geq -1$ zu interpretieren, was trivialerweise erfüllt ist. Betrachten wir also $T^*(u_0)<\infty$ und nehmen an, dass (LB) nicht gilt, dass also für ein $t\in[0,T^*(u_0))$

$$T^*(u_0)-t<\frac{1}{2(L(\|F(0)\|_E+2\|u(t)\|_E)+1)}=T(\|u(t)\|_E,F).$$

(T die in Satz 1 garantierte "lifespan" für den Anfangswert $u(t)$.) Sei $v\in C([0,T(\|u(t)\|_E,F)],E)$ die Lösung von

$$v(s)=T(s)u(t)+\int_0^s T(s-\sigma)F(v(\sigma))\,d\sigma$$

entsprechend Satz 1. Wir stückeln:

$$w(s):=\begin{cases} u(s) & \text{für } 0\leq s\leq t\\ v(s) & \text{"}\quad t\leq s\leq t+T(\|u(t)\|_E,F)\end{cases}$$

Dann ist w eine stetige Lösung von $\Lambda w = w$ (kurze Rechnung!) auf dem Intervall $[0, t+T(\|u(t)\|_E, F)]$, was wg. $t + T(\|u(t)\|_E, F) > T^*(u_0)$ ein Widerspruch zur Definition von T^* steht. Damit ist (b) gezeigt. $\square$

Bezüglich der <u>stetigen Abhängigkeit</u> der Lösungen von den Daten haben wir das folgende Ergebnis:

<u>Satz 3</u>: Es seien F, L, T^* wie in Satz 2, $u_0 \in E$ und $(u_0^{(n)})_n$ eine Folge in E mit $\lim_{n\to\infty} \|u_0^{(n)} - u_0\|_E = 0$.

$u \in C([0, T^*(u_0)), E)$ und $u_n \in C([0, T^*(u_0^{(n)})), E)$, $n \in \mathbb{N}$, seien die Lösungen von

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))\,ds \qquad \text{bzw. von}$$

$$u_n(t) = T(t)u_0^{(n)} + \int_0^t T(t-s)F(u_n(s))\,ds.$$

Dann gelten:

(a) $\liminf_{n\to\infty} T^*(u_0^{(n)}) \geq T^*(u_0)$, d.h. die "Lebensdauer-Funktion" $T^*: E \to (0, \infty]$ ist unterhalb stetig.

(b) $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ in $C([0, T^*(u_0)), E)$.

Bew.: Die Behauptungen sind gleichbedeutend mit den folgenden: Für alle $T \in (0, T^*(u_0))$ gelten:

(a) $\liminf_{n \to \infty} T^*(u_0^{(n)}) \geq T$ und

(b) $\lim_{n \to \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t) - u(t)\|_E = 0.$

(Letzteres können wir als Definition der Konvergenz in $C([0, T^*(u_0)), E)$ betrachten.) Um diese wiederum zu zeigen, definieren wir

$$M := 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_E \ ; \ T_M := \frac{1}{2L(2M + \|F(0)\|_E) + 2} > 0.$$

T_M ist die durch einmalige Anwendung des Fixpunkt-satzes garantierte Lebensdauer der Lösungen zu Daten v_0 der Größe $\|v_0\|_E \leq M$. Diese Lösungen – sagen wir v – werden im Zeitintervall $[0, T_M]$ nicht größer als $\sup_{0 \leq t \leq T_M} \|v(t)\|_E \leq 2M + \|F(0)\|$. (Beweis von Satz 1)

Weiter setzen wir für $n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n := \{ t \in [0, T^*(u_0^{(n)})) : \|u_n(s)\|_E \leq 2M + \|F(0)\| \ \forall s \in [0,t] \}$$

Wir haben $\|u_0\|_E \leq \frac{M}{2}$ und daher für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$: $\|u_0^{(n)}\|_E < M$. Für diese n haben wir also $\tau_n \geq T_M > 0$. (Damit ist ausgeschlossen, dass sich das gemeinsame Existenzintervall von u und den u_n auf den Nullpunkt zusammenzieht.)

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ fixiert (hinreichend groß wie oben gefordert).

Dann erhalten wir für $0 \le t \le \min(T, \tau_n)$:

$$\|u(t)-u_n(t)\|_E \le \|u_0-u_0^{(n)}\|_E + \int_0^t \|F(u(s))-F(u_n(s))\|_E \, ds$$

$$\le \|u_0-u_0^{(n)}\|_E + L(2M+\|F(0)\|_E) \cdot \int_0^t \|u(s)-u_n(s)\|_E \, ds,$$

wobei wir die Integralgleichung, die Lipschitz-Abschätzung für F und die Tatsache benutzt haben, dass

$$\|u(t)\|_E, \ \|u_n(t)\|_E \le 2M + \|F(0)\|_E .$$

Das Gronwall-Lemma gibt

$$\|u(t)-u_n(t)\|_E \le \|u_0-u_0^{(n)}\|_E \, e^{t L(2M+\|F(0)\|_E)} \qquad (*)$$

bzw.

$$\sup_{0\le t\le \min(T,\tau_n)} \|u(t)-u_n(t)\|_E \le \|u_0-u_0^{(n)}\|_E \, e^{T\cdot L(2M+\|F(0)\|_E)} \quad (**)$$

Indem wir in (*) n groß genug wählen, können wir $\|u_n(t)-u(t)\|_E \le \frac{M}{2}$ erreichen, und wegen $\|u(t)\|_E \le M/2$ mit der Dreiecksungleichung

$$\|u_n(t)\|_E \le \|u(t)\|_E + \|u_n(t)-u(t)\|_E \le M,$$

und zwar für alle $t \in [0, \min(T,\tau_n)]$. Schauen wir auf die Definition von τ_n, sehen wir, dass dort eine schwächere Bedingung gestellt ist, so dass $\tau_n > \min(T, \tau_n)$, da $s \mapsto \|u_n(s)\|_E$ stetig ist. Es folgt $\tau_n > T$ und damit $T^*(u_0^{(n)}) > T$. Gilt für alle hinreichend großen n, und hieraus folgt (a).

Des weiteren erstreckt sich das sup in (**) tatsächlich über alle $t \in [0,T]$, und im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt auch (b).

<u>Abschließende Bem.:</u>

Sofern wir an den Operator $A: E \supset D_A \longrightarrow E$ und die Nichtlinearität F keine weiteren Voraussetzungen stellen, sind die Sätze 1–3 das wesentliche, was man zur Lösbarkeit der Integralgleichung (D) auf dem abstrakten Level erreichen kann. Wollen wir z.B. bei "großen" Daten von lokaler Wohlgestelltheit auf globale schließen, so benötigen wir dazu "a priori"-Schranken, vgl. Satz 2 (c). Bei Existenz solcher Schranken hängt in empfindlicher Weise vom Zusammenspiel des Operators A mit der Nichtlinearität $F(u)$ ab, ein Vorzeichen bei F kann hierbei entscheidend sein.

Auch Aussagen über globale Existenz bei klei-

Neue Daten benötigen schärfere Abschätzungen für die Lösungen der linearen Gleichung als die oben verwendeten.

Was den <u>Zsh. zwischen</u> der <u>Integralgleichung</u> (D) <u>und</u> dem <u>Cauchy-Problem</u> (CP) anbelangt, mussten wir uns auf die recht schwachen Implikationen:

$u \in C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], E)$ ist eine klassische Lösung von (CP).

$\Longrightarrow$ $u \in C([0,T], E)$ löst die Integralgleichung (D).
(In diesem Fall spricht man von einer "<u>milden Lösung</u>" des Cauchy-Problems (CP).)

$\Longrightarrow$ $u \in C([0,T], E) \cap C^1([0,T], \overline{E})$ ist eine ("schwache") Lösung von $(\overline{CP})$.

beschränken. Hier kann man auf dem abstrakten Level etwas mehr erreichen, wenn man verlangt, dass der Banachraum E reflexiv ist. Es gilt:

<u>Satz 4</u>: Es sei E reflexiv, $u_0 \in D_A$ und $u \in C([0,T], E)$ eine Lösung von (D). Dann ist

$$u \in C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], E)$$

und löst das Cauchy-Problem $u(t=0)=u_0$ für

$$\frac{du}{dt} = Au + F(u).$$

Ohne die Voraussetzung der Reflexivität des Raumes E wird diese Aussage i. allg. falsch. Eine Diskussion dazu und den Beweis des Satzes finden Sie im Buch von Cazenave und Haraux, Remark 4.3.10 und Prop. 4.3.9. Wie geht die Reflexivität von E beim Beweis ein?

Man rechnet nach, dass $u : [0,T] \to E$ Lipschitz-stetig ist (das erhält man aus (D), nicht triviale Rechnung).

Daraus folgt: $F \circ u : [0,T] \to E$ ist Lipschitz, denn u ist beschränkt in E und F Lipschitz auf beschränkten Teilmengen.

Dann verwendet man die folgende Aussage:

Wenn E reflexiv ist und $f : I \to E$ beschränkt und Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Dann ist $f \in W^{1,\infty}(I,E)$ und $\|f'\|_\infty \leq L$.

(C.H., Cor. 1.4.41, soweit bin ich bei der Besprechung des Bochner-Integrals bzw. der Sobolev-Re. vektorwertiger Funktionen in PDE I nicht gekommen. Hierfür ist "E reflexiv" notwendig!)

Abschließend beachtet man $W^{1,\infty}([0,T)) \subset W^{1,1}((0,T))$.

Da $F \circ u \in C([0,T],E)$ ist, folgt die Aussage aus Satz 1 in Abschnitt 4.1.