Wellengleichungen im engeren Sinne

1. Gleichungen und Anfangswertprobleme

In der Vorlesung über nichtlineare dispersive Gln. haben wir eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\,\varphi(-i\nabla)u \quad (+N(u)) \qquad (1)$$

eine(*) Wellengleichung genannt, wenn die sogenannte Phasenfunktion $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ reellwertig ist.

Im Fall eines $N\times N$-Systems würde man entsprechend für $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{N\times N}$ verlangen, dass $\varphi(\xi)$ für alle $\xi\in\mathbb{R}^n$ eine hermitesche Matrix ist, also $\varphi(\xi)_{jk} = \overline{\varphi(\xi)_{kj}}$, so dass alle Eigenwerte dieser Matrizen reell sind.

Die gesuchte Lösung in (1) ist eine Funktion

$$u : I\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^N, \quad (t,x)\longmapsto u(t,x),$$

und $N(u)$ eine nichtlineare Funktion von u und ggf. auch von Ableitungen von u nach den x- oder Raumvariablen. Wie der Operator $\varphi(-i\nabla)$ zu verstehen ist, ist klar im Fall, dass φ ein Polynom ist:

$$\varphi(\xi) = \sum_{\substack{|\alpha|\le M\\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} \lambda_\alpha \xi^\alpha \Rightarrow \varphi(-i\nabla) = \sum_{\substack{|\alpha|\le M\\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} \lambda_\alpha (-i\nabla)^\alpha$$

mit

$$(-i\nabla)^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}.$$

(*) nichtlineare, wenn $N(u)\neq 0$ ist.

Ist φ kein Polynom, und ist $u(t,\cdot)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ (allgemeiner: auf einer LCA-Gruppe G) definiert, so erklären wir

$$\varphi(-i\nabla) := \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)\mathcal{F},$$

wobei $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformation ist.

[Für $f \in S(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \nabla^\beta f(x)| < \infty \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}^n\}$ setzt man $\mathcal{F}f(\xi) := (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$. Dann ist $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ein Isomorphismus mit Inverser

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) := (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} g(\xi)\,d\xi.$$

Häufig schreibt man $\mathcal{F}f = \hat{f}$ und $\mathcal{F}^{-1}g = \check{g}$. Für $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, dem Raum aller stetigen linearen Funktionale auf $S(\mathbb{R}^n)$, setzt man $\hat{T}[f] := T[\hat{f}]$ bzw. $\check{T}[g] := T[\check{g}]$ $\forall f,g \in S(\mathbb{R}^n)$ so dass sich alle wichtigen Eigenschaften von $\mathcal{F}$ auf $S(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{F}$ (oder $\wedge$) auf $S'(\mathbb{R}^n)$ vererben, insbesondere ist auch $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ ein Isomorphismus. Für die PDE's wichtig:

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx \underset{\text{part. Int.}}{=} i\xi_j \hat{f}(\xi)$$

bzw. $\widehat{(-i\nabla)f}(\xi) = \xi\hat{f}(\xi)$, so dass die beiden für Polynome angegebenen Definitionen von $\varphi(-i\nabla)$ übereinstimmen.]

Betrachtet man die Gl. (1) auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ggf. beschränkt, mit Glattheitsbedingungen an $\partial\Omega$), und

sucht also Lösungen $u: I \times \Omega \to \mathbb{C}^N$, so bietet zumindest (3)
für eine Hilbertraum- (z.B.: $L^2(\Omega)$-) basierte Theorie
der Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte
Operatoren eine allgemeinere Möglichkeit, den Operator
$\varphi(-i\nabla)$ zu erklären.

Bsp.: Wählen wir in (1) $\varphi(\xi) = -|\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, so ist
$\varphi(-i\nabla) = \Delta$ und (1) lautet (nach Multiplikation
mit i) $i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = iN(u)$, und das ist eine
nichtlineare Schrödinger-Gleichung. Da φ hier reell
ist, handelt es sich bei der Schrödinger-Gleichung
um eine Wellengleichung im weiteren Sinn.

Nun soll es in dieser Vorlesung um Wellengleichungen
im engeren Sinne gehen. Darunter möchte ich solche Gln.
(oder Systeme) vom Typ (1) verstehen, deren Phasen-
funktion für große ξ linear wächst, also

$$|\varphi(\xi)| \sim |\xi| \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |\xi| \geq 1$$

Es handelt sich im wesentlichen um zwei Gln.:

1. Die Klein-Gordon-Gleichung

$$\underbrace{(\Box}_{\text{d'Alembert- oder auch Box-Operator}} + m^2)u := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)u = N(u) \qquad (m \in \mathbb{R}),$$

die für $m=0$ in die klassische Wellengleichung $\Box u = N(u)$ übergeht.

Letztere beschreibt eine Vielzahl von Phänomenen in der klassischen Mechanik, der Optik, der Akkustik, ..., z.B.

- Schwingungen einer Saite ($n=1$) oder einer Membran ($n=2$);
- Ausbreitung von Licht, allgemeiner von elektromagnetischen Wellen im Vakuum oder in homogenen/isotropen Medien ($n=3$), die Wellengleichung lässt sich herleiten aus den Maxwell'schen Gleichungen, das sind die Grundgleichungen der klassischen Elektrodynamik.
- Ausbreitung von Schall, ebenfalls in homogenen und isotropen Medien.

Die Klein-Gordon-Gleichung wurde in den 20er Jahren zuerst von Schrödinger und dann von Klein und Gordon vorgeschlagen als Grundgleichung einer relativistischen Formulierung der Quantenmechanik. Das hat sich nicht durchgesetzt, u.a. deshalb, weil die von J. v. Neumann u.a. entwickelte Axiomatik der Quantentheorie verlangt, dass die Dynamik eines quantalen Systems stets durch eine PDE beschrieben wird, die erster Ordnung in der Zeit ist. Die KGG spielt übrigens in einigen fortgeschrittenen physikalischen Theorien eine wesentliche Rolle, insbesondere in Systemen (KG-Zakharov-, Dirac-KG-System). An die Stelle der KGG in der relativistischen QM getreten ist die

2. Dirac-Gleichung (tatsächlich ein System aus $N = 2^{[\frac{n+1}{2}]}$ Gleichungen):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\alpha \cdot \nabla \psi + \beta m \psi \quad (+N(\psi))$$

$$:= -i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + m\beta\psi \quad (+N(\psi)).$$

Hierbei ist $\psi : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^N$ die gesuchte Lösung, der sog. "Spinor", und bei den Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und β handelt es sich um hermitesche $N \times N$-Matrizen (hermitesch: $A = A^*$, d.h. $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$), die sogenannten "Dirac-Matrizen". Die physikalische Theorie stellt hieran die folgenden Bedingungen ("Antivertauschungsrelationen"):

$$(a) \qquad \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} E_N \quad (E_N = N{\times}N \text{ Einheitsmatrix})$$

$$(b) \qquad \alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0, \quad \beta^2 = E_N$$

Aus $\alpha_k^2 = \beta^2 = E_N$ folgt mit dem Determinantenmultiplikationssatz, dass $(\det \alpha_k)^2 = (\det \beta)^2 = 1$, also $\det(\alpha_k)$, $\det(\beta) \in \{\pm 1\}$. Hermitesche Matrizen haben stets reelle Eigenwerte, hierfür kommen also nur $\lambda \in \{\pm 1\}$ in Frage.

Mit $Sp(AB) = Sp(BA)$ erhalten wir aus (b):

$$Sp(\alpha_j) \underset{(b)}{=} Sp(\beta^2 \alpha_j) = Sp(\beta(\beta\alpha_j)) = Sp(\beta\alpha_j\beta)$$

$$\underset{(b)}{=} - Sp(\alpha_j \beta^2) = - Sp(\alpha_j) = 0$$

und ebenso unter Verwendung von (a), dass $Sp(\beta) = 0$.

Aus $\lambda_e \in \{\pm 1\}$ und $Sp(\alpha_j) = Sp(\beta) = \sum_{e=1}^{N} \lambda_e = 0$ folgt, dass N gerade sein muss.

Für $\underline{n=2}$ kann man die sog. "<u>Paulischen Spin-Matrizen</u>" verwenden, dass sind die 2×2-Matrizen

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

genauer wählt man $\alpha_{1,2} := \sigma_{1,2}$ und $\beta = \sigma_3$. Dann sind die Bedingungen (a) und (b) erfüllt. Für $n=1$ reichen $\alpha_1 = \sigma_1$ und $\beta = \sigma_3$. In beiden Fällen $(n \in \{1,2\})$ kommt man also mit $N = 2$ aus.

Für $n=2$ ist das Format 2×2 jedoch nicht mehr ausreichend. Begründung: $\{\sigma_j\}_{j\in\{1,2,3\}}$ bilden zusammen mit E_2 eine Basis von $\mathbb{C}^{2\times 2}$, eine weitere müssten wir also durch Linearkombination gewinnen, wobei E_2 wg. der Spurbedingung ausscheidet. Ansatz also

$$\sigma_4 = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \sigma_j$$

$$\rightsquigarrow \quad \sigma_4\sigma_j + \sigma_j\sigma_4 = 2\lambda_j\sigma_j^2 = 2\lambda_j E_2 \quad \forall j\in\{1,2,3\}$$

Hierfür ist aber $=0$ gefordert, also $\lambda_j = 0 \ \forall j\in\{1,2,3\} \Rightarrow \sigma_4 = 0$

Für $n=3$ ist jedoch $N=4$ $(= 2^{[\frac{n+1}{2}]})$ ausreichend, was durch explizite Angabe eines Satzes von Dirac-Matrizen einsehbar ist. Man wählt üblicherweise

$$\alpha_j := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix},$$

wobei die Einträge selbst wieder 2×2-Matrizen sind, nämlich die Pauli-Matrizen σ_j und die Einheitsmatrix E_2.

(Für $n=4$ könnte $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix}$ reichen, müsste man nachrechnen. Dass für höhere Raumdimensionen $n\geq 5$ das Format $N\times N$ mit $N = 2^{[\frac{n+1}{2}]}$ notwendig und hinreichend ist, bedarf genauerer (algebraischer) Überlegungen.)

Phasenfunktionen: Zu deren Bestimmung müssten wir nur die homogenen linearen Gleichungen betrachten.

Dirac-Gleichung: Multiplikation mit $(-i)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}\psi - i m \beta \psi$$

$$= i\left(-\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - m\beta\right)\psi ,$$

woraus wir $\varphi(\xi) = -\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j + m\beta\right)$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$

ablesen können. Für die

Klein-Gordon-Gleichung müssen wir die Gleichung 2. Ordnung $(\Box + m^2)u = 0$ in ein System erster Ordnung überführen. Dazu setzen wir $A := \sqrt{-\Delta + m^2}$, erklärt als $\mathcal{F}^{-1}\sqrt{|\xi|^2+m^2}\,\mathcal{F}$ oder mit Hilfe des Spektralsatzes,

$$u_\pm := \frac{1}{2i} A^{-1}\left(iA \pm \frac{\partial}{\partial t}\right)u \qquad (\Rightarrow u_+ + u_- = u)$$

und hierfür erhalten wir die Gln. 1. Ordnung in t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm i A u_\pm \overset{!}{=} i\,\varphi(-i\nabla)u_\pm$$

also $\varphi(\xi) = \pm\sqrt{|\xi|^2+m^2}$. (Für Einzelheiten: Vorlesung "dispersive", S. 8 f., eine ähnliche Rechnung folgt später.)

Anfangsbedingungen: Aus der Theorie gewöhnlicher Dgln. ist es wohl überraschend, dass wir die Anfangsbedingungen

$$u(0) = u_0 \ , \quad u_t(0) = u_1 \qquad \text{(für Klein-Gordon bzw. Wellen-)}$$

bzw. $\psi(0) = \psi_0$ (für Dirac)

stellen müssen, um die Eindeutigkeit ~~der~~ Lösung zu erzwingen. Hierbei betrachtet man üblicherweise Daten aus normierten linearen Teilräumen von $S'(\mathbb{R}^n)$, i.E.:

$$(u_0, u_1) \in \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1 \subset S'(\mathbb{R}^n) \times S'(\mathbb{R}^n)$$

$$\psi_0 \in \mathcal{D}^N \subset (S'(\mathbb{R}^n))^N$$

Eine Standardwahl sind hierbei $\mathcal{D} = H^s(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_i = H^{s_i}(\mathbb{R}^n)$, wobei $H^s(\mathbb{R}^n) = \{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \| f \|_{H^s} < \infty \}$ mit der Norm

$$\| f \|_{H^s} := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(1 + |\xi|^2)^s}_{=: \langle \xi \rangle^{2s}, \text{ „japanese brackets"}} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}$$

(Sobolevräume, genauer: Bessel-Potentialräume der Ordnung $-s$, wobei $s \in \mathbb{R}$ zugelassen ist. $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$, es handelt sich um Hilberträume.)

Für das Verhältnis von s_0 zu s_1 ist angesichts der obigen Zerlegung $u = u_+ + u_-$ mit $u_\pm = \frac{1}{2i} A^{-1}(iA \pm \frac{\partial}{\partial t}) u$,

dass $\frac{\partial u}{\partial t} \in AH^{s_0} \underset{m>0}{=} H^{s_1}$, also $s_0 = s_1 + 1$.

Alternativ: Letztes Semester: KGG $\iff \frac{dV}{dt} = AV = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - I & 0 \end{pmatrix} V$

mit $\mathcal{D}_A = \underbrace{\mathcal{D}_\Delta}_{= H^2(\Omega), \text{ wenn } \partial\Omega \text{ ein } C^2\text{-Rand ist}} \times H_0^1(\Omega)$, $V = \binom{u}{u_t}$. Zeigt, dass man eine x-Ableitung Unterschied zwischen u und u_t braucht

Zusammenhang zwischen Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung:

Sei $\psi \in (C^2(\mathbb{R}^{n+1}))^N$ eine Lösung der freien Dirac-Gleichung

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\partial_j\psi + m\beta\psi \quad \text{mit} \quad \psi(0)=\psi_0$$

also $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\partial_j + im\beta\right)\psi = 0$. Hierauf wenden wir den Operator $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\partial_j - im\beta\right)$ an und verwenden die Antivertauschungsrelationen für Dirac-Matrizen:

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\partial_j - im\beta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\partial_j + im\beta\right)\psi$$

$$= \Big\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\partial_j + im\beta\Big) - \Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\partial_j + im\beta\Big)\frac{\partial}{\partial t}$$

$$- \Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\partial_j + im\beta\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\partial_k + im\beta\Big)\Big\}\psi$$

$$= \Big\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k,j=1}^{n}\alpha_j\alpha_k\partial_j\partial_k - im\sum_{j=1}^{n}\underbrace{(\alpha_k\beta + \beta\alpha_k)}_{=0\ (b)}\partial_k + m^2\Big\}\psi$$

$$= \Big\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{n}\underbrace{(\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j)}_{=0\ (a)}\partial_j\partial_k - \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\alpha_j^2}_{=E_N\ (a)}\partial_j^2 + m^2\Big\}\psi$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)\psi,$$

wobei man ( ) als Diagonal-Matrix (-Operator) mit Diagonalelement $\partial_t^2 - \Delta + m^2$ lesen muß.

D.h.: (Jede Komponente von) ψ ist eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung mit Anfangswerten

$$\psi(0) = \psi_0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}(0) = -\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\partial_j + im\beta\Big)\psi_0 .$$

Umgekehrt sei $u \in C^2(I \times \mathbb{R}^4, \mathbb{C}^N)$ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung $(\Box + m^2)u = 0$ mit Anfangswerten $u(0) = u_0 \in C^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^N)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^N)$.

Dann können wir hieraus ohne große Mühe eine Lösung der Dirac-Gleichung gewinnen: Dazu setzen wir

$$H_1 := \sum_{j=1}^{4} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + im\beta ,$$

so dass die freie Dirac-Gleichung $(\frac{\partial}{\partial t} + H_1)\psi = 0$ lautet.

Oben haben wir nachgerechnet, dass

$$\Box + m^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - H_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_1\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + H_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - H_1\right),$$

letzteres, weil die Zeitableitung mit H_1 vertauscht.

Wir setzen also $\psi := (\frac{\partial}{\partial t} - H_1)u$ und erhalten

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_1\right)\psi = (\Box + m^2)u = 0,$$

d.h. ψ löst die freie Dirac-Gleichung, und für die Anfangswerte haben wir

$$\psi(0) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - H_1\right)u(t)\Big|_{t=0} = u_1 - H_1 u_0 \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^N).$$

Insbesondere der erste Teil dieses einfach nachzurechnenden Zusammenhangs hat eine wichtige Konsequenz:

Bei der Behandlung semilinearer Wellengleichungen spielen Raum-Zeitabschätzungen des Typs

$$\|u\|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}}, \qquad (*)$$

sogenannte Strichartz-Abschätzungen, eine wichtige Rolle. Hierbei ist die gemischte L^p-Norm definiert durch

$$\|u\|_{L_t^p(L_x^q)} := \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

und $u(t) = \cos(tA)u_0 + A^{-1}\sin(tA)u_1$ mit $A = \sqrt{-\Delta + m^2}$ eine Lösung der homogenen linearen Klein-Gordon-Gleichung mit Daten $u(0) = u_0$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$. (Im Fall der Wellengleichung, also $m=0$, sind die Sobolev-Normen auf der rechten Seite in der Regel durch ihre homogenen Varianten $\|f\|_{\dot{H}^s}$, def. durch

$$\|f\|_{\dot{H}^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

zu ersetzen.) Nun sei ψ eine Lösung der freien Dirac-Gleichung mit $\psi(0) = \psi_0$ und eine Abschätzung vom Strichartz-Typ $(*)$ bereits bewiesen. Da ψ zugleich eine Lösung von KGG mit $\psi(0) = \psi_0$, $\psi_t(0) = -H_1\psi_0$ ist, folgt

$$\|\psi\|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \|\psi_0\|_{H^s} + \|H_1\psi_0\|_{H^{s-1}} \lesssim \|\psi_0\|_{H^s}.$$

Hierbei sind die auftretenden Normen (z.B.) zu lesen als

$$\|\psi\|_{L^p_t(L^q_x)} = \sum_{j=1}^{N} \|\psi^{(j)}\|_{L^p_t(L^q_x)}$$

bzw. $$\|\psi_0\|_{H^s} = \left(\sum_{j=1}^{N} \|\psi_0^{(j)}\|^2_{H^s} \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei der Index (j) die Komponenten des Spinors ψ bezeichnet. Auf diese Weise "vererben" sich also die Strichartz-Abschätzungen von der Wellen-/KG-Gleichung auf die Dirac-Gleichung.

<u>Invarianz:</u>

- Wellen-, Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung (auch die meisten nichtlinearen Versionen) sind invariant unter <u>Translationen</u> in Zeit und Raum, d.h.: Ist u eine Lösung einer dieser Gleichungen und

  $$v(t,x) := u(t-t_0, x-x_0),$$

  so ist v ebenfalls eine Lösung, was offensichtlich ist.

- Eine (eigentliche) <u>Lorentz-Transformation</u> ist eine lineare Abbildung $\Lambda : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Eigenschaft, dass $\Lambda G \Lambda^T = G$ für $G = \mathrm{diag}(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n\text{-mal}})$.

  Die Invarianz von Wellen- und KG-Gleichungen unter solchen Transformationen (im o.g. Sinn) ist Gegenstand der Übungen. Dort klären wir auch, in welchem Sinne die Dirac-Gleichung als Lorentz-invariant angesehen wird.

Translationen und eigentliche Lorentztransformationen zusammen bilden die uneigentlichen Lorentz-Transformationen. (Häufig sind diese gemeint, wenn in der Lit. von Lorentz-Transformationen, -Invarianz, etc. die Rede ist, hier ist eine gewisse Vorsicht geboten.)

- Die klassische Wellengleichung und die masselose ($m=0$) Dirac-Gleichung (beide homogen und linear!) sind invariant unter Skalentransformationen $u \mapsto u_\lambda$, wobei

$$u_\lambda(t,x) := u(\lambda t, \lambda x).$$

Das beruht darauf, dass Zeit- und x-Ableitungen in der gleichen Ordnung – und nur in dieser! – auftreten. Beim Übergang zu $m \neq 0$ geht diese Invarianz verloren. Auch einige semilineare Wellen- und Dirac-Gln. weisen eine Skalierungssymmetrie auf, z. B.

$$\Box u = |u|^{p-1} \cdot u.$$

Nehmen wir an, u sei eine Lösung und skalieren setzt $u_\lambda(t,x) := \lambda^\beta u(\lambda t, \lambda x)$. Dann ist

$$\Box u_\lambda(t,x) = \lambda^{\beta+2} \cdot \Box u(\lambda t, \lambda x) = \lambda^{\beta+2} \cdot |u(\lambda t,\lambda x)|^{p-1} u(\lambda t, \lambda x)$$

$$= \lambda^{\beta+2-p\cdot\beta} |u_\lambda(t,x)|^{p-1} u_\lambda(t,x),$$

also u_λ eine Lösung derselben Gleichung, falls

$$(1-p)\cdot\beta + 2 = 0 \iff \beta = \frac{2}{p-1} \quad \text{gewählt wird.}$$

Hieraus können wir einen Anhaltspunkt gewinnen, in welchen $H^s(\mathbb{R}^4)$-Datenräumen wir lokale Wohlgestelltheit erwarten können. Gehen wir von LWP in dem engeren Sinne aus, dass wir die <u>Lebensdauer durch die Größe der Norm</u> der Daten kontrollieren können, so wird durch die Bedingung

$$\|u(0)\|_{\dot H^{s_c}} \overset{(!)}{=} \|u_\lambda(0)\|_{\dot H^{s_c}} \leftarrow \text{homogene Sobolev-Norm}$$

eine kritische Sobolev-Regularität festgelegt, unterhalb derer wir <u>keine</u> LWP erwarten können. Im vorliegenden Fall: $u_\lambda(0) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(0,\lambda x)$ und

$$\|u_\lambda(0)\|^2_{\dot H^s} = \lambda^{\frac{4}{p-1}} \int_{\mathbb{R}^4} |\xi|^{2s} |\widehat{u(0,\lambda\cdot)}(\xi)|^2 d\xi \qquad \begin{array}{l}\widehat{f(\lambda\cdot)}(\xi) \\ = \lambda^{-4}\hat f(\frac{\xi}{\lambda})\end{array}$$

$$= \lambda^{\frac{4}{p-1}-2\cdot 4} \int_{\mathbb{R}^4} |\xi|^{2s} |\widehat{u(0)}(\tfrac{\xi}{\lambda})|^2 d\xi$$

$$= \lambda^{\frac{4}{p-1}-4} \int_{\mathbb{R}^4} |\lambda\eta|^{2s} |\widehat{u(0)}(\eta)|^2 d\eta = \underbrace{\lambda^{\frac{4}{p-1}-4+2s}}_{\overset{!}{=}0} \|u(0)\|^2_{\dot H^s}.$$

Das ist unabhängig von λ für $s = \underline{\underline{s_c := \frac{4}{2} - \frac{2}{p-1}}}$.

<u>Erhaltungsgrößen</u> spielen eine fundamentale Rolle zur Gewinnung von a priori-Abschätzungen und damit für globale Wohlgestelltheit bei "großen Daten". Für die KG-Gleichung mit typischer Nichtlinearität

$$(\Box + m^2)u + \lambda |u|^{p-1}u = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

haben wir in den Übungen zu "Dispersive..." die Energieerhaltung $E(u(t)) = E(u(0))$ für

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2 + m^2 |u(t,x)|^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{2\lambda}{p+1} |u(t,x)|^2 \, dx$$

hergeleitet. Dazu nimmt man ausreichend glatte und schnell fallende Lösungen an, multipliziert die Gl. mit $\overline{u_t}$ und integriert den Realteil des Ergebnisses über den $\mathbb{R}^n$. Den Term $(-\Delta u)\overline{u_t} + (\overline{-\Delta u})u_t$ integriert man partiell zu $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u(t,x)|^2 dx$.

Gilt insbes. auch für $\lambda = 0$, also die homogene lineare Gleichung, und in diesem Fall kann man u durch $J^s u = \mathcal{F}^{-1}\langle \xi \rangle^s \mathcal{F} u$ für beliebiges $s \in \mathbb{R}$ ersetzen. Die L^2-Norm ist <u>nur</u> für die $u_\pm$-Anteile <u>im linearen Fall</u> erhalten.

Wie sieht das im Fall der Dirac-Gleichung aus? Betrachten wir dazu gleich eine typische Nichtlinearität:

$$i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha\cdot\nabla\psi\right) - m\beta\psi + f((\psi,\beta\psi))\cdot\beta\psi = 0 \qquad \text{(NLD)}$$

Hierbei bezeichnet $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^N$, und $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0)=0$. Ferner sei $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$.

(1) Erhaltung der L^2-Norm von ψ: Wie üblich nehmen wir ausreichend glatte und schnell fallende Lösungen an, so dass wir formal rechnen können. Zuerst bilden wir

$$
\begin{aligned}
0 &= (\text{Gleichung};\psi) - (\psi,\text{Gleichung})\\
&= i((\psi_t,\psi) + (\alpha\cdot\nabla\psi,\psi)) - m(\beta\psi,\psi) + f((\psi,\beta\psi))(\beta\psi,\psi)\\
&\quad + i((\psi,\psi_t) + (\psi,\alpha\cdot\nabla\psi)) + m(\psi,\beta\psi) - f((\psi,\beta\psi))(\psi,\beta\psi)
\end{aligned}
$$

Da β hermitesch ist, ist $(\beta\psi,\psi) = (\psi,\beta\psi)$, so dass alle Terme, die ein β enthalten wegfallen. Ferner:

$$
\begin{aligned}
(\alpha\cdot\nabla\psi,\psi) + (\psi,\alpha\cdot\nabla\psi) &= \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j\partial_j\psi,\psi) + (\psi,\alpha_j\partial_j\psi)\\
&\underset{\alpha_j \text{ hermitesch}}{=} \sum_{j=1}^{n} (\partial_j\psi,\alpha_j\psi) + (\psi,\partial_j\alpha_j\psi) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j(\psi,\alpha_j\psi),
\end{aligned}
$$

so dass $\int_{\mathbb{R}^n} \ldots\, dx$ darüber verschwindet. Nach Multiplikation mit $(-i)$ und Integration über den $\mathbb{R}^n$ bleibt also

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t}(\psi,\psi)\,dx = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}(\psi,\psi)\,dx = \frac{d}{dt}\|\psi\|^2_{L^2_x}.$$

Die L^2-Norm $\|\psi(t)\|^2_{L^2_x} = \sum_{k=1}^{N} \|\psi_k(t)\|^2_{L^2_x}$ des Spinors er- (18)

weist sich also als zeitlich konstant, sie ist eine definite Erhaltungsgröße. Von der Nichtlinearität haben wir hierfür nur verwendet, dass sie die Gestalt

$$f(\psi)\cdot\beta\psi \quad \text{mit } \underline{\text{reellem}}\ f \text{ hat.}$$

Die o.g. Gestalt mit $f((\psi,\beta\psi))\beta\psi$ benötigt man tatsächlich zur Herleitung der Energieerhaltung:

$$E(\psi(t)) = E(\psi_0) \qquad (\psi(0)=\psi_0)$$

Um E zu bestimmen, verfährt man ähnlich wie oben. Man startet mit

$$0 = (\text{Gleichung}, \psi_t) + (\psi_t, \text{Gleichung}) = \ldots ,$$

nutzt zur Vereinfachung die Eigenschaften der Dirac-Matrizen sowie die Produkt- und Kettenregel und integriert (partiell) über den $\mathbb{R}^4$. Das Ergebnis ist

$$E(\psi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} (\psi, \underbrace{(\alpha\cdot(-i\nabla)+m\beta)}_{=:H_0}\psi) - F((\psi,\beta\psi))\,dx \longrightarrow \text{Übung.}$$

mit dem "Hamilton-Operator" H_0, mit dem sich die freie Dirac-Gleichung kurz schreiben lässt als

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_0\psi .$$

Die Frage ist, ob aus diesem Energiefunktional a priori-Schranken gewonnen werden können (etwa für die $H^{1/2}$-Norm), und bereits der Term $(\psi, \beta\psi)$ lässt gewisse Zweifel an der Definitheit von $E(\psi)$ aufkommen. Wir sollten also H_0 etwas genauer untersuchen.

<u>Diagonalisierung von H_0 im Fourier-Raum</u> ($\underset{\text{phys.}}{=}$ Impulsraum)

("Foldy-Wouthuysen-Transformation")

Dazu fassen wir H_0 als Matrix-wertigen Fourier-Multiplikator – zunächst auf $(S(\mathbb{R}^n))^N$ – auf und schreiben

$$H_0 = \mathcal{F}^{-1} M(\xi) \mathcal{F} \quad \text{mit} \quad M(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j + m\beta = \alpha\cdot\xi + m\beta$$

Dann ist für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ $M(\xi)$ eine hermitesche $N\times N$-Matrix, lässt sich also unitär auf Diagonalgestalt bringen. Es gibt also unitäre und Diagonalmatrizen $U(\xi)$ und $D(\xi)$, so dass

$$U(\xi)\, M(\xi)\, U(\xi)^{-1} = D(\xi)$$

Für $n \in \{1,2,3\}$ und $N \in \{2,4\}$ kann man das noch zu Fuß durchrechnen und kommt zu den folgenden Ergebnissen bzw. Vermutungen (für den Fall höherer Dimensionen):

(1) Die von ξ abhängigen Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{\frac{N}{2}} = -\lambda_{\frac{N}{2}+1} = \ldots = -\lambda_N = (|\xi|^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} =: \lambda(\xi)$$

und, wenn wir β als Diagonalmatrix wählen, gilt $D(\xi) = \lambda(\xi)\beta$
(Die Standardwahl von β ist $\begin{pmatrix} E_{N/2} & 0 \\ 0 & -E_{N/2} \end{pmatrix}$.)

Dies ist nicht sehr verwunderlich, denn

- $M(\xi)$ ist hermitesch, hat also nur reelle Eigenwerte, und
- ist eine Summe von Matrizen, deren Spur $= 0$ ist, so dass auch $Sp(M(\xi)) = 0$ gilt. Ferner
- haben wir $(\partial_t - H_1)(\partial_t + H_1) = (\partial_t^2 - \Delta + m^2)E_N$ nachgerechnet für $H_1 = \alpha \cdot \nabla + im\beta = i \cdot M(-i\nabla)$, und ein Teilergebnis dieser Rechnung ist, dass $-H_1^2 = -\Delta + m^2$, also $M(\xi)^2 = (|\xi|^2 + m^2)E_N$.

(2) Mit $a_\pm(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 \pm \frac{m}{\lambda(\xi)}\right)^{\frac{1}{2}}$ und

$$U(\xi) := a_+(\xi)E_N + a_-(\xi) \cdot \beta\, \alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|}$$

erhalten wir eine unitäre Matrix, so dass

$$U(\xi)M(\xi)U(\xi)^{-1} = \lambda(\xi) \cdot \beta$$

Hiervon sollten wir uns im allgemeinen Fall überzeugen!

Zunächst ist mit $(a_{jk})^+ = (\overline{a_{kj}})$

$$U(\xi)^+ = a_+(\xi)E_N + a_-(\xi)\left(\beta \cdot \alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|}\right)^+ = a_+(\xi)E_N + a_-(\xi)\left(\alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|}\right)^+ \cdot \beta$$

$$= a_+(\xi)E_N - a_-(\xi)\beta \cdot \alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|},$$

letzteres wegen $\alpha_j\beta = -\beta\alpha_j$.

Dann haben wir (unter vorübergehender Auslassung von E_N und des (ξ))

$$U^+ U = (a_+ - a_- \beta\, \alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|})(a_+ + a_- \beta\, \alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|})$$

$$= a_+^2 - a_- \beta\, \alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|} a_+ + a_+ a_- \beta\, \alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|} - a_-^2 \beta \cdot \alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \beta\, \alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|}$$

$$= a_+^2 + a_-^2 \left(\alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|}\right)^2 \quad \text{und}$$

$$\left(\alpha \cdot \frac{\xi}{|\xi|}\right)^2 = \frac{1}{|\xi|^2} \cdot \sum_{j,k=1}^{4} \alpha_j \xi_j \alpha_k \xi_k = \frac{1}{|\xi|^2}\Big(\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{4} \xi_j \xi_k (\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j) + \sum_{j=1}^{4} \xi_j^2 \alpha_j^2\Big)$$

$$= \frac{1}{|\xi|^2} \sum_{j=1}^{4} \xi_j^2 E_N = E_N, \text{ also}$$

$$U^+ U = (a_+^2 + a_-^2) E_N = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{\lambda} + 1 - \frac{m}{\lambda}\right) E_N = E_N,$$

so dass $U(\xi)$ tatsächlich unitär ist. Wir haben also

$$U(\xi)^+ = U(\xi)^{-1} = a_+(\xi) E_N - a_-(\xi) \beta \cdot \alpha \cdot \tilde{\xi}, \quad \tilde{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|}$$

und berechnen weiter

$$M(\xi)\, U(\xi)^{-1} = (\alpha \cdot \xi + m\beta)(a_+ - a_- \beta\, \alpha \cdot \tilde{\xi})$$

$$= a_+ (\alpha \cdot \xi + m\beta) - a_- (\alpha \cdot \xi + m\beta)(\beta\, \alpha \cdot \tilde{\xi}) \qquad (\alpha \cdot \tilde{\xi})^2 = E_N$$

$$= a_+ (\alpha \cdot \xi + m\beta) + a_- (|\xi| \beta - m\, \alpha \cdot \tilde{\xi})$$

und schließlich

$$\mathcal{U}(\xi)\, H(\xi)\, \mathcal{U}(\xi)^{-1} = (a_+ + a_- \beta\, \alpha\cdot\tilde{\xi})\big(a_+(\alpha\cdot\xi + m\beta) + a_-(|\xi|\beta - m\,\alpha\cdot\tilde{\xi})\big)$$

$$= a_+^2(\alpha\cdot\xi + m\beta) + a_-^2\big(\beta\,\alpha\cdot\tilde{\xi}\,(|\xi|\beta - m\,\alpha\cdot\tilde{\xi})\big)$$

$$+ \; a_+ a_-\big(|\xi|\beta - m\,\alpha\cdot\tilde{\xi} + \beta\,\alpha\cdot\tilde{\xi}\,(\alpha\cdot\xi + m\beta)\big)$$

$$= a_+^2(\alpha\cdot\xi + m\beta) + a_-^2(-\alpha\cdot\xi - m\beta)$$

$$+ \; 2a_+a_-(|\xi|\beta - m\,\alpha\cdot\tilde{\xi})$$

$$= (a_+^2 - a_-^2)(\alpha\cdot\xi + m\beta) + 2a_+a_-\Big(|\xi|\beta - \frac{m}{|\xi|}\,\alpha\cdot\xi\Big) =: (*)$$

Nun haben wir mit $a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \pm \frac{m}{\lambda}}$:

$$a_+^2 - a_-^2 = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{m}{\lambda} - 1 + \frac{m}{\lambda}\Big) = \frac{m}{\lambda}, \quad 2a_+a_- = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\lambda^2}} = \frac{|\xi|}{\lambda},$$

so dass
$$(*) = \beta \underbrace{\Big(\frac{m^2}{\lambda} + \frac{|\xi|^2}{\lambda}\Big)}_{= \lambda\cdot\frac{m^2 + |\xi|^2}{\lambda^2} = \lambda} + \alpha\cdot\xi\Big(\frac{m}{\lambda} - \frac{m}{|\xi|}\cdot\frac{|\xi|}{\lambda}\Big) = \lambda\beta.$$

Also
$$H_0 = \mathcal{F}^{-1} H(\xi)\, \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}\,\mathcal{U}(\xi)^{-1}\lambda(\xi)\beta\, \mathcal{U}(\xi)\, \mathcal{F}$$

~~bzw~~

$$= \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\mathcal{U}(\xi)^{-1}\mathcal{F}}_{\mathcal{U}_{FW}^{-1}}\, \lambda(-i\nabla)\beta\, \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\mathcal{U}(\xi)\mathcal{F}}_{=:\, \mathcal{U}_{FW}}$$

bzw.
$$\mathcal{U}_{FW}\, H_0\, \mathcal{U}_{FW}^{-1} = \lambda(-i\nabla)\beta \; \left(= \begin{pmatrix} \sqrt{-\Delta + m^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-\Delta + m^2} \end{pmatrix} \right),$$

letzteres im Fall der Standardwahl von β. Die unitäre Abbildung

$$\mathcal{U}_{FW} : L^2(\mathbb{R}^4; \mathbb{C}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^4; \mathbb{C}^N)$$

heißt die Foldy-Wouthuysen-Transformation.

Bezeichnen wir mit $\langle\, ,\rangle$ das Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R}^4;\mathbb{C}^N)$, so erhalten wir für die freie Dirac-Gleichung die (kinetische) Energie

$$E(\psi) = \frac{1}{2}\langle \psi, H_0\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle \psi, U_{FW}^{-1}\lambda(-i\nabla)\beta U_{FW}\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle \tilde{\psi}, \lambda(-i\nabla)\beta\tilde{\psi}\rangle \quad \text{mit } \tilde{\psi} = U_{FW}\psi,$$

die nicht definit oder auch nur semidefinit ist.

Tatsächlich sehen wir eine orthogonale Zerlegung

$$L^2(\mathbb{R}^4;\mathbb{C}^N) = H_{pos} \oplus H_{neg}$$

in ~~Eigen~~ Teilräume positiver bzw. negativer Energie, die beide isomorph zu $L^2(\mathbb{R}^4;\mathbb{C}^{N/2})$ sind. Für a priori-Abschätzungen scheint die Energieerhaltung der Dirac-Gleichung also überhaupt nichts herzugeben. (Zitat Escobedo/Vega (1997, über semilineare Dirac-Gleichungen wie oben: "It has not yet been possible to use any conservation law to obtain global solutions [...]." Meines Wissens hat sich für die Gleichung oben bis heute auch nichts geändert – für Systeme (DKG) sieht das anders aus.)

Wir können aus unserer Rechnung aber auch noch andere Schlüsse ziehen: Der Multiplikationsoperator

$$M_{sym}: L^2_\xi(\mathbb{R}^4;\mathbb{C}^N) \longrightarrow L^2_\xi(\mathbb{R}^4;\mathbb{C}^N),\quad f \mapsto M_{sym} f,$$

definiert durch $M_{sym} f(\xi) = \lambda(\xi)\beta f(\xi)$ ist wg. der Diagonalgestalt leicht zu analysieren: Da λ reell ist, ist M_{sym} symmetrisch, und auf

$$\mathcal{D}_{M_{sym}} := \{ f \in L^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^N) : \langle \xi \rangle f \in L^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^N) \}$$

selbstadjungiert. Wg. $\lambda(\xi) = \sqrt{m^2 + |\xi|^2}$ und $\lambda(\mathbb{R}^4) = [m, \infty)$ gilt für das Spektrum

$$\sigma(M_{sym}) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty)$$

da M_{sym} auch Mult mit $-\lambda$ enthält.

(Das Spektrum eines Multiplikationsoperators haben wir im letzten Semester in den Übungen diskutiert.)

Da H_0 unitär äquivalent zu M_{sym} ist, ändert sich für H_0 an diesen Aussagen lediglich der Definitionsbereich. Es gilt:

$$H_0 : L^2_x(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^N) \supset \mathcal{D}_{H_0} \longrightarrow L^2_x(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^N)$$

mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_{H_0} := (H^1(\mathbb{R}^4))^N = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}_{M_{sym}}$ ist selbstadjungiert mit $\sigma(H_0) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty)$.

Dass iH_0 die unitäre Gruppe $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ mit

$$U(t) = \mathcal{F}^{-1} e^{itM(\xi)} \mathcal{F}$$

erzeugt, ist nach unseren Überlegungen auch ohne den Satz von Stone klar.