2.1 Lineare Gleichungen I: Integraldarstellungen der Lösungen

Nach dem Duhamelschen Prinzip sind die Lösungen der inhomogenen Glg. mit Anfangswerten $u_0 = u_1 = 0$ bzw. $\psi_0 = 0$ gegeben durch

$$u_p(t) = A^{-1} \int_0^t \sin((t-s)A) f(s) ds, \quad A = (-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}$$

im Fall der Wellen- und KG-Gleichung bzw. durch

$$\psi_p(t) = \int_0^t e^{-i(t-s)H_0} f(s) ds, \quad H_0 = -i\alpha\cdot\nabla + m\beta$$

im Fall der Dirac-Gleichung. Wir können uns hier also auf die homogenen Glg. beschränken, d.h. auf die Bestimmung von Darstellungen für die Evolutionsoperatoren

$$\cos(tA) \qquad \text{und} \qquad A^{-1} \sin(tA)$$

in $u(t) = \cos(tA) u_0 + A^{-1} \sin(tA) u_1$ für die Lösung u der Wellen- bzw. KG-Gleichung mit Daten (u_0, u_1) bzw.

$$e^{-itH_0}$$

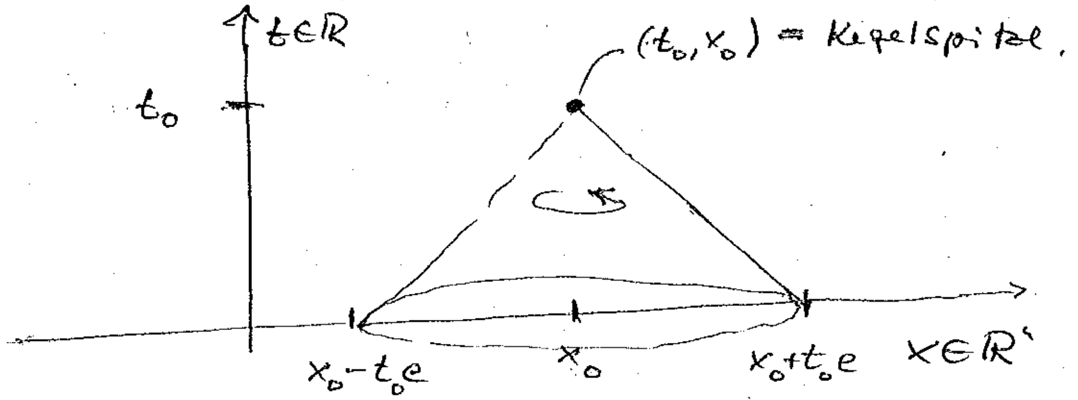
in $\psi(t) = e^{-itH_0}\psi_0$ für die Lösung ψ der freien Dirac-Gleichung mit $\psi(0) = \psi_0$. Dabei kann das zweite auf das erste zurückgeführt werden, wie wir in Kap. 1 gesehen haben.

2.1 Eine lokale Version des Eindeutigkeitssatzes

Die Eindeutigkeit von Lösungen der Wellen- bzw. KG-Gleichung zu Daten $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ steht uns im Prinzip aus der abstrakten Theorie des letzten Semesters zur Verfügung. Diese berücksichtigt jedoch keine Dämpfungsterme $\sim \frac{\partial u}{\partial t}$ und gibt keinen Aufschluss über das Abhängigkeitsgebiet der Lösung. Daher zunächst ein etwas genaueres klassisches Energie-Argument:

Für $(t_0, x_0) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ definieren wir den Kegel

$$K := K(t_0, x_0) := \{ (t,x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^n ;\ |x - x_0| \le t_0 - t \}.$$



Ferner sei $q \in C((0,\infty), \mathbb{R}^n)$ mit $q(t,x) \ge 0 \ \forall (t,x)$.

Dann gilt der folgende

Eindeutigkeitssatz: Sei $u \in C^2(\mathring{K}) \cap C^1(K)$ eine Lösung des Cauchy-Problems

$$u(0,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \quad \forall\ x \in \overline{B_{t_0}(x_0)}$$

für die gedämpfte KG-Gleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u + q \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0 .$$

Dann ist $u = 0$.

Bew.: O.E. nehmen wir u als reell an und multiplizieren die Gleichung(*) mit $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \Delta u + m^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot u + \underbrace{q \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}_{\geq 0}$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + |\nabla u(t)|^2 + m^2 u^2\right)}_{= 2\mathcal{E}\ (=2\mathcal{E}(t,x),\ \text{Energiedichte})}$$

$$- \underbrace{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2 + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta u\right)}_{= \langle \nabla u_t, \nabla u \rangle + u_t \Delta u = \operatorname{div}_x (u_t \cdot \nabla_x u)}$$

Nun integrieren wir über den Kegelstumpf

$$G := \{ (t,x) \in K : 0 \leq t \leq t_1 \}, \quad \text{wobei } t_1 \in (0, t_0).$$

Dann ist

$$0 \geq \int_G \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(t,x) - \operatorname{div}_x \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \cdot \nabla u(t,x) \right) dx\, dt =: (*),$$

und hierauf soll der Gauss'sche Integralsatz

(*) wie bei der Herleitung der Energieerhaltung

$$\int_G \operatorname{div} F(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_{\partial G} \langle F(\bar{x}), \nu(\bar{x}) \rangle \underbrace{d\bar{x}}_{= dt\, dx}$$

ν: äußere Einheitsnormale

angewendet werden. Welche Beiträge erhalten wir?

$$0 \geq \int_{|x-x_0|< t_0-t_1} \mathcal{E}(x,t_1)\, dx - \int_{|x-x_0|<t_0} \mathcal{E}(x,0)\, dx$$ (von Deckel und Boden, wo $\nu(\bar{x}) = \pm e_0$)

$$+ \int_{\text{Mantel}} \mathcal{E}(t,x)\cdot \nu_0(t,x) - \langle \tfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)\, \nabla u(t,x), \nu_x(t,x) \rangle\, dS_{(t,x)}$$

Nun ist auf dem Kegelmantel $\nu_0(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und ebenso $|\nu_x(t,x)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so dass sich der Integrand im letzten Integral nach unten abschätzen lässt durch

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2 + m^2 u^2) - |u_t|\,|\nabla u| \right) \geq 0,$$

so dass auch das gesamte Mantelintegral ≥ 0 ist.

Es folgt

$$\int_{|x-x_0|\leq t_0} \mathcal{E}(0,x)\, dx \geq \int_{|x-x_0|<t_0-t_1} \mathcal{E}(t_1,x)\, dx .$$

Sind nun $u_0(x) = u_1(x) = 0$ für $|x-x_0| \leq t_0$, wie vorausgesetzt, so auch $\mathcal{E}(0,x)$ und damit beide Integrale

Es folgt: $\mathcal{E}(t,x) = 0 \quad \forall\, (t,x) \in K$ und damit ist u konstant auf K ($m=0$ ist möglich!)

Wg. $u_0 = 0$ folgt dann $u = 0$ auf K. $\square$

Interpretation: Stimmen die Daten (u_0, u_1) und (v_0, v_1) zweier Lösungen u und v auf einer Kugel $\overline{B_{t_0}(x_0)}$ überein, so sind $u|_{K(t_0,x_0)} = v|_{K(t_0,x_0)}$, auch wenn sie sich außerhalb dieser Mengen unterscheiden können. (Globale Eindeutigkeit ergibt sich natürlich auch, wenn $(u_0,u_1)=(v_0,v_1)$ auf jeder Kugel gilt.) Wir können auch sagen:

Der Wert der Lösung $u(t_0,x_0)$ an der Stelle (t_0,x_0) wird nur von den Werten der Daten auf $\overline{B_{t_0}(x_0)}$ bestimmt. ("<u>Schwaches Huyghens'sches Prinzip</u>").

Ziehen wir noch die Invarianz der KGG unter Zeitspiegelung und -translation in Betracht, so können wir den Kegel nach oben öffnen und die Spitze nach $(t_0,x_0)=(0,x_0)$ verschieben. Dann liest sich die Interpretation so:

Der Wert der Daten (u_0,u_1) an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^4$ beeinflusst die Lösung u nur in dem "Vorwärts-" oder "Lichtkegel" $K_{x_0} = \{(t,x) : |x-x_0| \leq t\}$. Das ist die <u>endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit</u>(*) (hier stets auf $c=1$ normiert) von Lösungen der Wellen- und Klein-Gordon-Gleichung. Aufgrund des einfachen Zshs. zwischen KGG und Dirac-Gleichung vererbt sich diese Eigenschaft auch auf Lösungen der Dirac-Gleichung. Damit ist ein ~~eindeutiger~~ klarer Gegensatz zur Schrödinger-Gleichung gegeben, deren

---

(*) manchmal auch mit Einstein-Kausalität bezeichnet

Lösungen man durch die Faltung

$$u(t,x) = (4\pi i t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy$$

erhält. Für $u_0 = \delta_0$ und $t > 0$ hat man etwa

$$u(t,x) = (4\pi i t)^{-n/2} e^{-i\frac{|x|^2}{4t}},$$

was nirgends verschwindet.

2.2 Die klassische Wellengleichung in ungeraden Raumdimensionen ($m=0$!)

Hier möchte ich anschließen an die Inhalte der Einführungsvorlesung von Herrn Braun. Dort haben Sie (oder die meisten von Ihnen) u.a. folgendes gelernt:

(1) $n=1$: Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ in einer Raumdimension ist gegeben durch

$$u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$$

mit "beliebigen" Funktionen F und G. Für klassische Lösungen muss man $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ voraussetzen, für Distributionslösungen reicht $F, G \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Sind die Cauchy-Bedingungen

$$u(0) = u_0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$$

gestellt, so ist die allgemeine Lösung entsprechend anzupassen, und man erhält die Formel von d'Alembert: (81)

$$u(t,x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(u_0(x+t)+u_0(x-t)\right)}_{=\cos(t\partial_x)u_0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\,ds}_{\sin(t\partial_x)\partial_x^{-1}u_1} .$$

Für klassische Lösungen muss man hier $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ voraussetzen.

Die Lösung beschreibt die Überlagerung von zwei <u>Transportvorgängen</u> mit entgegengesetzter Richtung aber gleichem Betrag der Geschwindigkeiten. Dieser Transport-Aspekt ist charakteristisch für Lösungen der Wellengleichung, in höheren Raumdim. kommt aber ein Abfall von $\|u(t)\|_{L^\infty_x}$ hinzu, der auf der Ausbreitung in verschiedene Koordinatenrichtungen beruht.

(2) In höheren Raumdimensionen spielen die <u>sphärischen Mittelwerte</u> $M(x,t;f)$ eine wesentliche Rolle, die für $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$ und $f\in C(\mathbb{R}^n)$ def. sind durch

$$M(x,t;f) := \frac{1}{\omega_n}\cdot\int_{|\xi|=1} f(x+t\xi)\,dS_\xi ,$$

wobei $\omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ die Oberfläche der n-dim. Einheitskugel ist. Das Integral einer stetigen Funktion g über die Einheitssphäre berechnet man (z. B.) zu

$$\int_{|\xi|=1} g(\xi)\,dS_\xi = \int_{|\xi'|<1} g(\xi', \sqrt{1-|\xi'|^2}) + g(\xi', -\sqrt{1-|\xi'|^2})\,\frac{d\xi'}{\sqrt{1-|\xi'|^2}}.$$

Diese Darstellung erhält man, wenn man die Hemisphären

$$S_\pm^{n-1} := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1,\ \pm\xi_n > 0\}$$

parametrisiert durch

$$\varphi_\pm : \mathbb{R}^{n-1} \supset B_1(0) \longrightarrow S_\pm^{n-1},\quad \xi' \longmapsto (\xi', \pm\sqrt{1-|\xi'|^2}).$$

Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-|\xi'|^2}}$ ist gerade die Gramsche Determinante dieser Parametrisierungen.

Eigenschaften der sphärischen Mittelwerte:

(1) ~~Eigenschaften~~ Für $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ist $M(\cdot,\cdot;f) \in C^k(\mathbb{R}^{n+1})$ (Differentiation unter dem Integral, der Integrationsbereich ist kompakt.)

(2) $M(x,0;f) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} f(x)\,dS_\xi = f(x)$

(3) $M(x,-t;f) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} f(x-t\xi)\,dS_\xi = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} f(x+t\xi)\,dS_\xi$

$= M(x,t;f)$, denn das Flächenmaß auf der S^{n-1} ist invariant unter $\xi \mapsto -\xi$. Ist $f \in C^1$, folgt also $\frac{\partial}{\partial t} M(x,0;f) = 0$, denn die Ableitung einer geraden Funktion ist ungerade.

(4) Reskalierung und Verschiebung ergeben für $t \neq 0$:

$$M(x,t;f) \overset{y=t\xi}{=} \frac{1}{\omega_n |t|^{n-1}} \int_{|\eta|=|t|} f(x+\eta)\,dS_\eta = \frac{1}{\omega_n |t|^{n-1}} \int_{|x-y|=|t|} f(y)\,dS_y$$

$$\underset{\text{Abk.}}{=:} \fint_{|x-y|=|t|} f(y)\,dS_y$$

05.11.18

(5) Es gilt der Satz über die Darboux'sche Dgl.: Ist $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $v(t,x) = M(x,t;f)$, so löst v die Dgl.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) v = 0 \qquad (t \neq 0).$$

(R.B., Lemma 11.8). Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes in A 2.1 sind Lösungen dieser Gleichung durch Vorgabe von $v(0)$ und $\frac{\partial v}{\partial t}(0)$ eindeutig festgelegt.

(3) Kirchhoff'sche Formel in $n=3$ Raumdimensionen: Wenn die "spherical means" und der Satz über die Darboux'sche Dgl. zur Verfügung stehen, ist die Lösung der hom. lin. Wellengleichung in drei Raumdim. keine große Kunst mehr. Man setzt für $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$

$$v_1(t,x) := t\,M(x,t;u_1)$$

und hat $v_1(0,x) = 0$ sowie

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}(t,x) = M(x,t;u_1) + t\frac{\partial}{\partial t} M(x,t;u_1),$$

so dass $\frac{\partial v_1}{\partial t}(0,x) = u_1(x)$ und

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}(t,x) = 2\frac{\partial}{\partial t}M(x,t;u_1) + t\frac{\partial^2}{\partial t^2}M(x,t;u_1)$$

$$= t\left(\frac{2}{t}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)M(x,t;u_1) \overset{\text{Darboux}}{=} t\,\Delta_x M(x,t;u_1) = \Delta v_1(t,x).$$

Also ist v_1 eine Lösung der Wellengleichung und ebenso, falls $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ ist,

$$v_0(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\big(tM(x,t;u_0)\big)$$

mit $v_0(0,x) = u_0(x)$ und $\frac{\partial v_0}{\partial t}(0,x) = t\cdot\Delta M(x,t;u_0)\big|_{t=0} = 0.$

Also ist $u(t,x) = v_0(t,x) + v_1(t,x)$ die gesuchte Lösung.

<u>Satz</u> (Kirchhoff'sche Formel): Sind $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$, so ist die klassische Lösung u von

$$\Box u = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$$

gegeben durch $u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(tM(x,t;u_0)) + tM(x,t;u_1)$.

(R.B., Thm. 11.9)

Bevor wir uns daran begeben, dieses Ergebnis auf höhere ungerade Raumdimensionen zu verallgemeinern, sollten wir zwei Konsequenzen feststellen:

(1) <u>Das starke Huygens'sche Prinzip</u>: Der Wert der Lösung $u(t_0,x_0)$ hängt nur von den Werten der Daten (u_0,u_1) auf dem Rand $\partial B_{t_0}(x_0)$ ab. Wir werden sehen, dass dies für die klassische Wellen-

gleichung in höheren ungeraden Raumdimensionen ebenfalls in dieser scharfen Form gilt (und damit auch für die masselose Dirac-Gleichung). Das H.'sche Prinzip in seiner starken Form geht jedoch verloren

- beim Übergang von der Wellengleichung zur KG-Gleichung (oder zur massiven Dirac-Gleichung) und
- für die Wellengleichung selbst in geraden Raumdimensionen. (Die Lebewesen in "Flatland" müssten also mit ganz anderen Sinnesorganen ausgestattet sein als wir.)

("Flatland": Novelle von Edwin Abbott Abbott (Pseudonym: A. Square), 1884)

(2) Time-decay: Wir betrachten der Einfachheit halber den Fall $u_0 = 0$ und $u_1 \in S(\mathbb{R}^3)$, also die Lösung

$$u(t,x) = t\,M(x,t;u_1)$$

von $\Box u = 0$, $u(0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$. Hierfür haben wir

$$u(t,x) = \frac{t}{\omega_3} \cdot \int_{|\xi|=1} u_1(x+t\xi)\,dS_\xi = \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \langle \xi u_1(x+t\xi), \nu_\xi \rangle\, dS_\xi$$

$$\underset{\text{Gauss}}{=} \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|<1} \operatorname{div}_\xi (\xi u_1(x+t\xi))\, d\xi \qquad \text{(3-dim Integral!)}$$

$$= \frac{t}{4\pi} \cdot \int_{|\xi|<1} 3\, u_1(x+t\xi) + \langle \xi, \nabla u_1(x+t\xi)\cdot t \rangle\, d\xi$$

Also $|u(x,t)| \lesssim \frac{t}{t^3} \int_{|\eta|<t} |u_1(x+\eta)|\,d\eta + \frac{t^2}{t^3} \int_{|\eta|<t} |\nabla u_1(x+\eta)|\,d\eta$

$d\eta = t^3 d\xi$

o.E. $t>0$ $\lesssim \frac{1}{t} \left(\|u_1\|_{L^{3/2}_x} + \|\nabla u_1\|_{L^1_x} \right)$

wobei wir mit Sobolev fast die $L^{3/2}$-Norm durch die $W^{1,1}$-Norm kontrollieren können. Also haben wir einen zeitlichen Abfall

$$\| u(t) \|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-1}, \quad (\text{hier} = t^{-\frac{n-1}{2}})$$

wenn wir eine Ableitung in L^1 kontrollieren können. Das war jetzt die Abschätzung für $(-\Delta)^{-1/2} \sin(t(-\Delta)^{1/2}) u_1$, für $\cos(t(-\Delta)^{1/2})$ müssen wir mit einem weiteren Ableitung Verlust in einer $L^1_x \to L^\infty_x$ - Abschätzung rechnen.

Abschätzungen dieser Art sind ein wesentlicher Schritt beim Beweis der Strichartz-Abschätzungen, die wiederum für die nichtlineare Theorie unverzichtbar sind. Genaueres dazu später.

(4.) Verallgemeinerung auf höhere ungerade Raumdimensionen (Herleitung und Formulierung des Satzes)

Mittelwertsatz v. Asgeirsson (Math. Annalen 1936): Es sei $u : (x,y) \mapsto u(x,y)$ in $C^2(\mathbb{R}^{2n})$ eine Lösung der (ultrahyperbolischen) Dgl. $\Delta_x u(x,y) = \Delta_y u(x,y)$. Dann gilt für alle $(x,y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, dass

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x+t\xi, y)\, dS_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x, y+t\xi)\, dS_\xi .$$

(hierbei: $\Delta_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $\Delta_y = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$.)

Bew.: Wir setzen

$$\mu(x,y,t) := \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x+t\xi,y)\,dS_\xi$$

und

$$\nu(x,y,t) := \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x,y+t\xi)\,dS_\xi$$

Dann gilt aufgrund der Eigenschaften der sphärischen Mittelwerte: $\mu(x,y,0) = \nu(x,y,0) = u(x,y)$ und $\frac{\partial \mu}{\partial t}(x,y,0) = \frac{\partial \nu}{\partial t}(x,y,0)$. Ferner haben wir nach dem Satz über die Darboux'sche Dgl.

$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\frac{\partial \mu}{\partial t} - \Delta_x \mu\right)(x,y,t) = 0 \qquad (*)$$

sowie

$$\left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\frac{\partial \nu}{\partial t} - \Delta_y \nu\right)(x,y,t) = 0,$$

und aufgrund der Voraussetzung $\Delta_x u(x,y) = \Delta_y u(x,y)$ ist

$$\Delta_y \nu(x,y,t) = \Delta_y \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} u(x,y+t\xi)\,dS_\xi$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} \Delta_y u(x,y+t\xi)\,dS_\xi \underset{\text{Dgl.}}{=} \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} \Delta_x u(x,y+t\xi)\,dS_\xi$$

$$= \Delta_x \nu(x,y,t).$$

Halten wir $y \in \mathbb{R}^n$ fest, so genügen also $\mu(\cdot,y,\cdot)$ und $\nu(\cdot,y,\cdot)$ der Darboux'schen Dgl. (*), und auch die Anfangswerte stimmen überein. Aufgrund des

Eindeutigkeitssatzes (mit $q(t,x) = \frac{n-1}{t} \geq 0$), dass $\mu(x,y,t) = \nu(x,y,t)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$. Da y in dieser Überlegung beliebig war, folgt $\mu = \nu$, wie behauptet. $\square$

Darüber hinaus benötigen wir die folgende Hilfsaussage zur Integration über die Einheitssphäre:

<u>Lemma 1</u>: Es sei $n \geq 2$ und $f \in C([-1,1])$. Dann ist

$$\int_{|\xi|=1} f(\xi_n)\, dS_\xi = \omega_{n-1} \cdot \int_{-1}^{1} f(t)\,(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt.$$

<u>Bew.</u>: Mit $\xi = (\xi', \xi_n)$, wobei $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ ist, haben wir

$$\int_{|\xi|=1} f(\xi_n)\, dS_\xi = \int_{|\xi'|<1} f\left(\sqrt{1-|\xi'|^2}\right) + f\left(-\sqrt{1-|\xi'|^2}\right) \frac{d\xi'}{\sqrt{1-|\xi'|^2}}$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\int_{|\xi'|=\varrho}}_{\text{Sphäre vom Radius } \varrho \text{ im } \mathbb{R}^{n-1}} f\left(\sqrt{1-\varrho^2}\right) + f\left(-\sqrt{1-\varrho^2}\right)\, dS_{\xi'}\, \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}$$

(Polarkoordinaten, oder Coarea-Formel)

$$= \omega_{n-1} \cdot \int_0^1 f\left(\sqrt{1-\varrho^2}\right) + f\left(-\sqrt{1-\varrho^2}\right) \cdot \frac{\varrho^{n-2}}{\sqrt{1-\varrho^2}}\, d\varrho = (*)$$

Wir substituieren $t = \sqrt{1-\varrho^2}$, d.h. $\varrho = \sqrt{1-t^2}$, $d\varrho = \frac{1}{\varrho}(-t)\,dt$

$\Rightarrow \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}\, d\varrho = -dt$, das „$-$" wird mit den Integralgrenzen verarbeitet. Dann ist

$$(*) = \omega_{n-1} \cdot \int_0^1 (f(t) + f(-t))\,(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt$$

$$= \omega_{n-1} \cdot \int_{-1}^{1} f(t)\,(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt, \text{ wie behauptet.}$$

$\square$

Satz ("Abelsche Integralgleichung") Es sei $n \geq 3$ ungerade und $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ eine Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \qquad \text{mit} \quad u(0) = u_0 \,, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \,.$$

Dann ist $u(t,x) = u(-t,x)$ und es gilt

$$\int_{-t}^{t} u(x,s)\,(t^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\,ds = \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}\, t^{n-2} M(x,t;u_0).$$

Bew.: (1) $\tilde{u}(t,x) = u(-t,x) \Rightarrow \Box \tilde{u} = 0$, $\tilde{u}(0,x) = u_0(x)$ und $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(0,x) = 0$. Mit dem Eindeutigkeitssatz folgt $u = \tilde{u}$.

(2) Zum Beweis der Integralgleichung benutzen wir den MWS von Asgeirsson mit Zentrum $(x,0)$:

$$M(x,t;u_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u_0(x+t\xi)\,dS_\xi = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} u(0,x+t\xi)\,dS_\xi \,.$$

Nun setzen wir $v(x,y) = u(y_n,x)$. Dann ist $\Delta_x v(x,y)$ $= \Delta_x u(y_n,x) \underset{WG}{=} \frac{\partial^2}{\partial y_n^2} u(y_n,x) = \Delta_y v(x,y)$, und es folgt

$$M(x,t;u_0) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} v(x+t\xi,0)\,dS_\xi \overset{HWS}{\underset{Asg.}{=}} \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} v(x,t\xi)\,dS_\xi$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} u(t\xi_n,x)\,dS_\xi = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\cdot\int_{-1}^{1} u(t\varrho,x)\,(1-\varrho^2)^{\frac{n-3}{2}}\,d\varrho,$$

letzteres nach Lemma 1. Wir substituieren $s = t\varrho$, so dass $d\varrho = \frac{1}{t}\,ds$ und $(1-\varrho^2)^{\frac{n-3}{2}} = \left(1-\left(\frac{s}{t}\right)^2\right)^{\frac{n-3}{2}}$ $= (t^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{t}\right)^{n-3}$. Damit ergibt sich

$$M(x,t;u_0) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \cdot t^{2-n} \int_{-t}^{t} u(s,x)\,(t^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\, ds .$$

Umstellen ergibt gerade die Beh. $\square$

Schließlich ist die Abelsche Integralgleichung zu lösen, die wir aufgrund der Symmetrie des Integrals in der Form

$$\int_0^t u(s,x)\,(t^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\, ds = \frac{\omega_n}{2\omega_{n-1}} \cdot t^{n-2} M(x,t;u_0) =: \varphi(t)$$

ausschreiben können. Differenzieren ergibt

$$(n-3)\cdot t \int_0^t u(s,x)\,(t^2-s^2)^{\frac{n-5}{2}}\, ds = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t)$$

bzw.

$$\int_0^t u(s,x)\,(t^2-s^2)^{\frac{n-5}{2}}\, ds = \frac{1}{n-3} \cdot \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi(t)$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^t u(s,x)\,(t^2-s^2)^{\frac{n-7}{2}}\, ds = \frac{1}{(n-3)(n-5)} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \varphi(t)$$

Das macht man insgesamt $\frac{n-3}{2}$ mal und gelangt zu

$$\int_0^t u(s,x)\, ds = \frac{1}{(n-3)!!} \cdot \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \varphi(t),$$

wobei $(n-3)!! = (n-3)(n-5)(n-7)\cdots 2$. Eine letzte Ableitung gibt

$$u(t,x) = \underbrace{\frac{\omega_n}{2\omega_{n-1}} \cdot \frac{1}{(n-3)!!}}_{= \frac{1}{(n-2)!!}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} M(x,t;u_0)\right)$$

nach etwas Rechnung, wobei man $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ und $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ beachten muß.

vgl. Sauvigny, PDE, Band 1, S. 411 ff.

Regularität: In dieser Formel liegen $\frac{n-3}{2}+1=\frac{n-1}{2}$ Zeitableitungen auf dem sphärischen Mittelwert $M(x,t;u_0)$. Damit die Formel zum Ziel führt, müssen wir also $u_0 \in C^{\frac{n-1}{2}+2}(\mathbb{R}^n) = C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$ voraussetzen (die $+2$ für den d'Alembert-Operator).

2. Anfangswert: Nun sei v eine Lösung von

$$\Box v = 0, \qquad v(0)=0 \qquad \text{und} \qquad v_t(0)=u_1.$$

Wir setzen $w = \frac{\partial}{\partial t} v$. Dann ist $\Box w = 0$, $w(0)=u_1$ und $\frac{\partial w}{\partial t}(t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t) = \Delta v(t)$, also $\frac{\partial w}{\partial t}(0) = \Delta v(0) = 0$, da $v(0)=0$. Also ist nach obigem

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t) = w(t) = \frac{1}{(n-2)!!}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} M(x,t;u_1)}$$

$$\rightsquigarrow v(t) = v(t)-v(0) = \int_0^t \frac{1}{(n-2)!!}\frac{\partial}{\partial s}\,(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{(n-2)!!}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\frac{n-3}{2}} s^{n-2} M(x,s;u_1)\Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{(n-2)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} M(x,t;u_1),$$

denn $\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} = c_n t^{n-2-\frac{n-3}{2}-\frac{n-3}{2}} + \ldots = c_n t + \ldots$ enthält mindestens einen Faktor t. Damit der Ausdruck für v noch in C^2 liegt, müssen wir $u_1 \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ voraussetzen.

Damit ist unser Kandidat für die Lösung tatsächlich gekürt, und wir können folgendes verkünden!

<u>Satz</u> 1: Es seien $n \geq 3$ ungerade, $u_0 \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ und

$$u(t,x) = \frac{1}{(n-2)!} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} M(x,t;u_0) + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} M(x,t;u_1) \right\}$$

Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ die Lösung des Cauchy-Problems

$$\Box u = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x).$$

Der <u>Beweis</u> dieses Satzes besteht aus einer elementaren aber durchaus mühsamen Rechnung, siehe Sauvigny, Band 1, S. 411 ff. An dieser Stelle möchte ich darauf verzichten. Stattdessen möchte ich
(5) kurz auf die Frage eingehen, ob wir dieses Ergebnis auch mit Fourieranalytischen Methoden hätten erzielen können. Betrachten wir dazu das reduzierte Problem

$$\Box u = 0 \qquad u(0) = 0 \qquad u_t(0) = u_1 \in S(\mathbb{R}^n),$$

letzteres, um bei allen Manipulationen mit der Fouriertransformation auf der sicheren Seite zu sein". Dann besteht unsere Aufgabe darin, die inverse Fouriertransformierte von

$$\hat{u}(t,\xi) = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \cdot \hat{u}_1(\xi)$$

zu finden, das ist ja die Lösung der gewöhnlichen Dgl. $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) = 0$, $\hat{u}(0,\xi) = 0$, $\hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi)$ und so kommt der Lösungsoperator $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \sin(t(-\Delta)^{\frac{1}{2}})$ zustande. Nach dem Faltungssatz ist also

$$u(t,x) = C \; S_t * u_1(x),$$

wobei sich die Faltung nur auf die x-Variablen bezieht. (Auf die korrekte Bestimmung der auftretenden Konstanten verzichte ich hier.) Die Distribution S_t ist die inverse Fouriertransformation der lokal integrierbaren Funktion

$$\xi \longmapsto |\xi|^{-1} \sin(t|\xi|).$$

Diese ist rotationssymmetrisch, woraus wir bereits schließen können, dass auch S_t rotationssymmetrisch ist, was die Aufgabe etwas erleichtert. Andererseits ist für $n \geq 2$ $\hat{S}_t \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \in [1,2]$, die inverse FT also distributionell zu berechnen, was einen Teil der Schwierigkeiten ausmacht. Der Rest ist technischer Natur.

Fangen wir, um es uns noch leichter zu machen, auf der anderen Seite an, denn wir kennen die Lösung ja bereits. Dann ist die Fouriertransformierte von

$$\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} M(\cdot,t;u_1)$$

bezüglich der x-Variablen zu berechnen. Um den Faltungssatz anwenden zu können, sollten wir den sphärischen Mittelwert

$$M(x,t;f) = \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} \int_{|y|=t} f(x+y)\,dS_y = (*)$$

als Faltung interpretieren, und zwar von f mit dem Maß $\frac{1}{\omega_n t^{n-1}}\sigma_t$, wobei σ_t das Flächenmaß der Sphäre vom Radius t ist, also

$$(*) = \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} \int f(x-y)\,d\sigma_t(y) = \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} f*\sigma_t(x)$$

Dann kommen wir zu der Behauptung

$$\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} = c_n\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{-1}\cdot\hat{\sigma}_t(\xi) \qquad (!)$$

Die Fouriertransformierte

$$\hat{\sigma}_t(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{|y|=t} e^{-iy\cdot\xi}\,dS_y = (2\pi)^{-n/2}\int_{|y|=t} e^{-iy_n|\xi|}\,dS_y$$

ist wg. der Rotationsinvarianz von σ_t nicht so schwierig zu berechnen; man kann durch Skalierung $t=1$ erreichen und anschließend Lemma 1 (oben) verwenden. (Ggf. Übung). In der Vorlesung "Harmonische Analysis" haben wir das bereits ausgerechnet, dort kann man das auch nochmal nachlesen (Abschnitt 1.4: Faltung und Fouriertransformation komplexer Radon-Maße), das Ergebnis ist

$$\hat{\sigma}_t(\xi) = t^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(t|\xi|)\,|\xi|^{1-\frac{n}{2}},$$

und damit lautet die rechte Seite von (!)

$$c_n \cdot \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{\frac{n}{2}-1} |\xi|^{1-\frac{n}{2}} \cdot J_{\frac{n}{2}-1}(t|\xi|)$$

$$= c_n |\xi|^{2-n} \cdot \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} (t|\xi|)^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}-1}(t|\xi|),$$

mit $x = t|\xi|$, $\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{|\xi|}{x}\frac{|\xi|\partial}{\partial|\xi|t} = |\xi|^2\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)$

$$= c_n \cdot |\xi|^{\underbrace{2-n+n-3}_{=-1}} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\frac{n-3}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}-1}(x)\Big|_{x=t|\xi|} =: (*)$$

Jetzt machen wir uns die Rekursionsformel (Problem 1!)

$$\frac{d}{dx}\left(x^p J_p(x)\right) = x^p J_{p-1}(x)$$

die Besselfunktionen zunutze!

$$(*) = c_n \cdot \frac{1}{|\xi|}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\frac{n-3}{2}-1} \underbrace{\frac{1}{x}\frac{d}{dx} x^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}-1}(x)}_{= x^{\frac{n}{2}-1-1} J_{\frac{n}{2}-1-1}(x)} \Big|_{x=t|\xi|}$$

$$= c_n \frac{1}{|\xi|}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\frac{n-3}{2}-k} \cdot x^{\frac{n}{2}-1-k} J_{\frac{n}{2}-1-k}(x)\Big|_{x=t|\xi|},$$

und das bis $k = \frac{n-3}{2}$, also $\frac{n}{2}-1-k = \frac{n}{2}-1-\frac{n}{2}+\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Damit kommen wir an bei

$$(*) = C_n \cdot \frac{1}{|\xi|} \cdot \sqrt{x} \cdot J_{\frac{1}{2}}(x) \Big|_{x = t|\xi|},$$

und mit $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ (Übungsblatt!) ist das

$$\ldots = C_n \cdot \frac{1}{|\xi|} \cdot \sin(t|\xi|),$$

was bis auf die Konstante tatsächlich(!) ist. Wenn man diese Rechnung noch von den Füßen auf den Kopf stellt, erhält man eine Herleitung der Integraldarstellung mit Fourier-Methoden.

(6) Warum ist die Dirac-Gleichung so kompliziert und lautet nicht einfach

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \lambda(-i\nabla)\beta\psi \quad \text{mit } \lambda(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 + m^2} \;?$$

Die Evolutionsoperatoren $\cos(t(-\Delta)^{1/2})$, $(-\Delta)^{-1/2}\sin(t(-\Delta))$, allgemeiner $e^{it\varphi(-i\nabla)}$ können (auf dem $\mathbb{R}^n$!) stets dargestellt werden als Faltungen mit Solonen

$$C_t(x), \quad S_t(x), \quad \text{allg.: } K_t(x)$$

von Distributionen, abhängig vom Zeitparameter t. Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit c bedeutet dabei, dass

$$\operatorname{supp}(K_t) \subset \overline{B_{ct}(0)},$$

wobei wir der Einfachheit halber stets $c = 1$ annehmen. Diese Eigenschaft hat der Evolutionsoperator $e^{it(-\Delta)^{1/2}}$ reicht, wie ich für den Fall $\underline{\underline{n=3}}$ (47)

begründen will.

Annahme: $e^{it(-\Delta)^{1/2}} = K_t *$ und $\operatorname{supp}(K_{t_0}) \subset \overline{B_{t_0}(0)}$,

für ein $t_0 > 0$. Dann zeigen einfache Substitutionen,

dass $\operatorname{supp}(K_t) \subset \overline{B_{|t|}(0)}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Dann ist auch

$$\sin(t(-\Delta)^{1/2}) = S_t^{(-\Delta)^{1/2}} * \quad \text{und} \quad \operatorname{supp}(S_t^{(-\Delta)^{1/2}}) \subset \overline{B_t(0)}$$

Andrerseits: $\sin(t(-\Delta)^{1/2}) f = (-\Delta)^{-1/2} (-\Delta)^{-1/2} \sin(t(-\Delta)^{1/2}) \Delta f$

$$= C \cdot \underbrace{|x|^{1-n}}_{= \mathcal{F}^{-1} |\xi|^{-1}} * t \cdot \sigma_t * \Delta f$$

$= \mathcal{F}^{-1} |\xi|^{-1}$, Vorlesung "Dispersive" oder Seminar "Faltungen"

Nun wählen wir eine Folge $(f_k)_k$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, so dass $(\Delta f_k)_k$ eine approximative Einheit und $\operatorname{supp}(f_k) \subset \overline{B_R(0)}$ bilden. Dann ist nach unserer Annahme $\operatorname{supp}(\sin(t(-\Delta)^{1/2}) f_k) \subset \overline{B_{R+t}(0)}$

und daher für jedes $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit Träger

$\operatorname{supp}(g) \subset \overline{B_{R+T}(0)}^c$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sin(t(-\Delta)^{1/2}) f(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{1-n} * t\sigma_t * \Delta f_k(x) g(x)\, dx = 0$$

und daher auch für $k \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{|x|^{1-n} * t\sigma_t(x)}_{> 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3} \cdot g(x)\, dx = 0$$

Widerspruch, wenn $g \neq 0$ und $g(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ ist.

(7) Die Abstiegsmethode nach Hadamard

(vgl. Einführungsvorlesung R.B., Thm. 11.10 und Herleitung)

Die grundlegende Idee ist einfach: Man sucht eine Integraldarstellung für Lösungen

$$v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \ (t,x) \longmapsto v(t,x)$$

der Wellengleichung in geraden Raumdimensionen n. Dazu fasst man v (etwas künstlich) als Funktion von $n+1$ Raumvariablen $x_1, \dots, x_{n+1}$ auf, genauer: man definiert

$$u(t,x,x_{n+1}) := v(t,x) \qquad (x = (x_1, \dots, x_n)),$$

und da u von x_{n+1} gar nicht wirklich abhängt, hat man $\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2} = 0$, und somit eine Lösung der Wellengleichung in $n+1$ Raumdimensionen. Da $n+1$ ungerade ist, steht für u eine Integraldarstellung zur Verfügung, die wegen der Unabhängigkeit von x_{n+1} noch etwas vereinfacht werden kann. Das Argument kann etwas verfeinert werden, um auch die Klein-Gordon-Gleichung in geraden Raumdimensionen zu behandeln. Um den Dimensionsauf- und abstieg besser benennen zu können, führen wir einige Bezeichnungen ein:

- $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x = \{(t,x) : t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\}$,

• $\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$; $\Delta_{n+1} = \Delta_n + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}$; $\Box_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n$.

Lemma 2: (a) Sei $v \in C^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$ eine Lösung des CPs

$$(\Box_n + m^2) v = 0 , \quad v(0,x) = v_0(x) ; \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = v_1(x) \tag{1}$$

und $u(t,x,x_{n+1}) = e^{imx_{n+1}} v(t,x)$. Dann löst $u \in C^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^{n+1})$ das Problem

$$\left.\begin{aligned} &\Box_{n+1} u = 0 , \quad u(0,x,x_{n+1}) = e^{imx_{n+1}} v_0(x) \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(0,x,x_{n+1}) = e^{imx_{n+1}} v_1(x) . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(b) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^{n+1})$ eine Lösung von (2) und

$$v(t,x) = e^{-imx_{n+1}} u(t,x,x_{n+1})$$

unabhängig von x_{n+1}, so ist $v \in C^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$ und löst (1).

Bem.: • In (b) muß die Unabhängigkeit von x_{n+1} vorausgesetzt werden. Diese wird sich später aus einer Rechnung ergeben.

• Der Fall $m=0$ entspricht der klassischen Wellengleichung und ist hier zugelassen.

• Teil (a) ist für die Eindeutigkeit und die Integraldarstellung, Teil (b) für die Existenz.

Bew.: Zu (a) Die Anfangswerte sind klar. Zur Dgl.:

$$\Box_{n+1} u(t,x,x_{n+1}) = (\Box_n - \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}) e^{imx_{n+1}} v(t,x)$$

$$= e^{imx_{n+1}} \Box_n v(t,x) + m^2 e^{imx_{n+1}} v(t,x)$$

$$= e^{imx_{n+1}} (\Box_n + m^2) v(t,x) = 0 .$$

(b) Auch hier ist nur die Dgl. zu überprüfen. Da wir v als unabhängig von x_{n+1} vorausgesetzt haben gilt:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} e^{-imx_{n+1}} u(t,x,x_{n+1}) = -im\, e^{-imx_{n+1}} u(t,x,x_{n+1})$$

$$+ e^{-imx_{n+1}} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} u(t,x,x_{n+1}) \quad \text{und}$$

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} e^{-imx_{n+1}} u(t,x,x_{n+1}) = -m^2 e^{-imx_{n+1}} u(t,x,x_{n+1})$$

$$+ 2(-im) \underbrace{e^{-imx_{n+1}} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} u(t,x,x_{n+1})}_{= im\, e^{-imx_{n+1}} u(t,x,x_{n+1})} + e^{-imx_{n+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} u(t,x,x_{n+1})$$

$$= m^2 e^{-imx_{n+1}} u(t,x,x_{n+1}) + e^{-imx_{n+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} u(t,x,x_{n+1}).$$

Damit ergibt sich

$$(\Box_n + m^2) v(t,x) = (\Box_n + m^2) e^{-imx_{n+1}} u(t,x,x_{n+1})$$

$$= e^{-imx_{n+1}} (\Box_{n+1} + m^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}) u(t,x,x_{n+1})$$

$$= e^{-imx_{n+1}} (m^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}) u(t,x,x_{n+1}) = 0 .$$

Damit können wir zeigen:

Satz 2: Es seien $n \geq 2$ gerade, $v_0 \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n_x)$ und $v_1 \in {}^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n_x)$. Dann wird das Cauchy-Problem für die KG-Gleichung

$$(\Box_n + m^2) v = 0 \; ; \qquad v(0,x) = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = v_1(x)$$

eindeutig gelöst durch

$$v(t,x) = \frac{1}{(n-2)!!} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t} \Big(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \Big)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \frac{s^{n-1}}{\sqrt{t^2-s^2}} \cos(m\sqrt{t^2-s^2})\, M(x,s;v_0)\, ds$$

$$+ \Big(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \Big)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \frac{s^{n-1}}{\sqrt{t^2-s^2}} \cos(m\sqrt{t^2-s^2})\, M(x,s;v_1)\, ds \Big\}$$

Bew.: Sei u die Lösung von $\Box_{n+1} u = 0$ mit Daten

$$u(0,x,x_{n+1}) = e^{imx_{n+1}} v_0(x) =: u_0(x,x_{n+1}) \qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x,x_{n+1}) = e^{imx_{n+1}} v_1(x) =: u_1(x,x_{n+1}) .$$

Dann gilt nach Satz 1 mit $\bar{x} := (x, x_{n+1})$, $\bar{\xi} = (\xi, \xi_{n+1})$ etc.

$$u(t,\bar{x}) = \frac{1}{(n-1)!!} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t} \Big(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \Big)^{\frac{n-2}{2}} t^{n-1} M(\bar{x},t;u_0)$$

$$+ \Big(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \Big)^{\frac{n-2}{2}} t^{n-1} M(\bar{x},t;u_1) \Big\}$$

wobei in der Formel in Satz 1 stets n durch $n+1$ ersetzt wurde und M jetzt den sphärischen Mittelwert in $n+1$ Raumdimensionen bezeichnet. Hierfür ergibt sich:

$$M(\bar{x},t;u_0) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int_{|\bar{\xi}|=1} u_0(\bar{x} + t\bar{\xi})\, dS_{\bar{\xi}}$$

$$= \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot \int_{|\bar{\xi}|=1} v_0(x+t\xi)\, e^{imx_{n+1}} e^{itm\xi_{n+1}}\, dS_{\bar{\xi}}$$

$$\overset{1)}{=} \frac{e^{imx_{n+1}}}{\omega_{n+1}} \cdot \int_{|\xi|<1} v_0(x+t\xi)\left(e^{imt\sqrt{1-|\xi|^2}} + e^{-imt\sqrt{1-|\xi|^2}}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{1-|\xi|^2}}$$

$$= \frac{2e^{imx_{n+1}}}{\omega_{n+1}} \int_{|\xi|<1} v_0(x+t\xi) \cos(mt\sqrt{1-|\xi|^2}) \frac{d\xi}{\sqrt{1-|\xi|^2}}$$

$$\overset{2)}{=} \frac{2e^{imx_{n+1}}}{\omega_{n+1}} \cdot \int_0^1 \int_{|\xi|=\varrho} v_0(x+t\xi)\, dS_\xi \, \cos(mt\sqrt{1-\varrho^2}) \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}$$

und mit $\xi = \varrho\eta$, so dass $dS_\xi = \varrho^{n-1} dS_\eta$

$$= \frac{2e^{imx_{n+1}}}{\omega_{n+1}} \cdot \int_0^1 \underbrace{\int_{|\eta|=1} v_0(x+t\varrho\eta)\, dS_\eta}_{= \omega_n M(x,t\varrho;v_0)} \frac{\varrho^{n-1}}{\sqrt{1-\varrho^2}} \cos(mt\sqrt{1-\varrho^2})\, d\varrho$$

$$= e^{imx_{n+1}} \frac{2\omega_n}{\omega_{n+1}} \cdot \int_0^1 M(x,t\varrho;v_0) \frac{\varrho^{n-1}}{\sqrt{1-\varrho^2}} \cos(mt\sqrt{1-\varrho^2})\, d\varrho$$

und schließlich ergibt die Substitution $t\varrho = s$, $d\varrho = \frac{ds}{t}$!

$$= e^{imx_{n+1}} \frac{2\omega_n}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} \int_0^t M(x,s;v_0) \frac{s^{n-1}}{\sqrt{t^2-s^2}} \cos(m\sqrt{t^2-s^2})\, ds$$

Setzen wir das oben ein, kürzen sich gerade die Faktoren t^{n-1} und $\frac{1}{t^{n-1}}$, die absolute Konstante wird zu

$$\frac{1}{(n-1)!!} \cdot \frac{2\omega_n}{\omega_{n+1}} = \frac{1}{(n-2)!!} \qquad \text{(elementare Rechnung)},$$

und wir gelangen zu

---

1) Standardparametrisierung der S^n, wie oben angegeben

2) Co-Area-Formel / Polarkoordinaten

$$u(t,\bar{x}) = e^{imx_{n+1}} \cdot \frac{1}{(n-2)!!} \cdot \{ \; \} \quad \text{mit}$$

$$\{ \; \} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \frac{s^{n-1}}{\sqrt{t^2-s^2}} \cos(m\sqrt{t^2-s^2})\, M(x,s;v_0)\, ds$$

$$+ \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \text{———}\ \text{"}\ \text{———}\ M(x,s;v_1)\, ds \, .$$

Wir stellen fest, dass $v(t,x) := e^{-imx_{n+1}} u(t,\bar{x})$ tatsächlich nicht von x_{n+1} abhängt. Lemma 2 (b) ergibt, dass v wie im Satz angegeben tatsächlich das Cauchy-Problem löst. $\square$

Für $m=0$ ist die angegeben Darstellung der Standard, zu finden z.B. in den Lehrbüchern von Sauvigny und auch Evans. Um weiter damit zu rechnen ist es sinnvoll, die darin enthaltenen Integrale in Volumenintegrale umzuschreiben, dadurch wird auch der Charakter einer Faltung etwas klarer erkennbar. Dazu schreiben wir

$$M(x,s;v_i) = \frac{1}{\omega_n s^{n-1}} \int_{|\xi|=s} v_i(x+\xi)\, dS_\xi \, ,$$

so dass

$$\int_0^t \frac{s^{n-1}}{\sqrt{t^2-s^2}} \cos(m\sqrt{t^2-s^2})\, M(x,s;v_i)\, ds$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_0^t \int_{|\xi|=s} v_i(x+\xi)\, dS_\xi \, \frac{\cos(m\sqrt{t^2-s^2})}{\sqrt{t^2-s^2}}\, ds$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_{|\xi|<t} v_1(x+\xi) \cdot \cos(m\sqrt{t^2-|\xi|^2}) \frac{d\xi}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}},$$

so dass sich mit $K_t(\xi) = \chi_{B_t(0)}(\xi) \cdot \frac{\cos(m\sqrt{t^2-|\xi|^2})}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}}$

für die Lösung ergibt:

$$v(t,x) = \frac{1}{\omega_n (n-2)!!} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} K_t * v_0(x) + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} K_t * v_1(x) \right\}$$

Damit können wir dann noch einen weiteren Abstieg durchführen, um das Cauchy-Problem für die Klein-Gordon-Gleichung in ungeraden Raumdimensionen zu lösen.

Satz 3: Es seien $n \geq 1$ ungerade, $v_0 \in C^{\frac{n+5}{2}}(\mathbb{R}^n)$ und $v_1 \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die eindeutige Lösung des CPs.

$$(\Box_n + m^2) v = 0; \qquad v(0,x) = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = v_1(x)$$

gegeben durch

$$v(t,x) = \frac{\pi}{\omega_{n+1}(n-1)!!} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|\xi|<t} v_0(x+\xi) J_0(m\sqrt{t^2-|\xi|^2})\, d\xi \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|\xi|<t} v_1(x+\xi) J_0(m\sqrt{t^2-|\xi|^2})\, d\xi \right\}$$

Hierbei ist

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-ix\cos t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{ixz}}{\sqrt{1-z^2}}\, dz$$

die Besselfunktion der Ordnung $p=0$.

Bem.: Für die Lösung u von $\Box_{n+1} u = 0$ mit Daten

$$u(0,\bar{x}) = e^{imx_{n+1}} v_0(x) =: u_0(\bar{x}) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,\bar{x}) = e^{imx_{n+1}} v_1(x) =: u_1(\bar{x})$$

gilt nach dem Zusatz zu Satz 2 (mit $m=0$)

$$u(t,\bar{x}) = \frac{1}{\omega_{n+1}(n-1)!!} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|\bar{\xi}|<t} u_0(\bar{x}+\bar{\xi}) \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{t^2-|\bar{\xi}|^2}}$$

$$+ \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \int_{|\bar{\xi}|<t} u_1(\bar{x}+\bar{\xi}) \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{t^2-|\bar{\xi}|^2}} \Big\}$$

und für die Integrale erhalten wir mit der speziellen Struktur der u_i:

$$\int_{|\bar{\xi}|<t} u_i(\bar{x}+\bar{\xi}) (t^2-|\bar{\xi}|^2)^{-1/2} d\bar{\xi}$$

$$= \int_{|\bar{\xi}|<t} v_i(x+\xi) e^{imx_{n+1}} e^{im\xi_{n+1}} (t^2-|\xi|^2-\xi_{n+1}^2)^{-1/2} d\bar{\xi}$$

$$= e^{imx_{n+1}} \cdot \int_{|\xi|<t} v_i(x+\xi) \int_{|\xi_{n+1}|<(t^2-|\xi|^2)} e^{im\xi_{n+1}} \left(1-\frac{\xi_{n+1}^2}{t^2-|\xi|^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\xi_{n+1}}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}} d\xi$$

Im inneren Integral substituieren wir $z = \frac{\xi_{n+1}}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}}$, so dass $-1<z<1$ und "$dz = \frac{d\xi_{n+1}}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}}$". Dies ergibt

$$\ldots = e^{imx_{n+1}} \int_{|\xi|<t} \int_{-1}^{1} e^{im\sqrt{t^2-|\xi|^2}\, z} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \, v_i(x+\xi)\, d\xi$$

$$= \pi \, e^{imx_{n+1}} \cdot \int_{|\xi|<t} v_i(x+\xi) \, J_0\left(m\sqrt{t^2-|\xi|^2}\right) d\xi$$

Einsetzen zeigt, dass $e^{-imx_{n+1}} u(t,\bar{x})$ tatsächlich nicht von x_{n+1} abhängt, und dass v (wie angegeben) nach Lemma 1 (b) die KG-Gleichung mit Daten v_0 und v_1 löst. $\square$

Abschließende Bem.:

(1) Die Übereinstimmung von Satz 1 einerseits und Satz 3 mit $m=0$ besprechen wir in den Übungen.

(2) Entsprechende Integraldarstellungen gelten für die Lösungen der Dirac-Gleichung.