2.2 Stationäre Phase und time decay

Vorbem.: Wir steuern jetzt zu auf den Beweis der Strichartz-Abschätzungen für $u(t) = \cos(tA)u_0 + A^{-1}\sin(tA)u_1$ mit $A = (-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}$.
Das sind die Raum-Zeit-Abschätzungen der Form

$$\|u\|_{L^p_t(L^q_x)} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}} \qquad (\text{Str.}),$$

im Fall der klassischen Wellengleichungen mit den homogenen Sobolevräumen $\dot{H}^s$ anstelle der inhomogenen wie oben. Der Standardbeweis solcher Abschätzungen besteht grob gesprochen aus zwei Schritten:

(1) Beweis einer "time-decay"-Abschätzung (auch "dispersive" Abschätzung) des Typs

$$\|u(t)\|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-\gamma(n)} \left(\|J^\sigma u_0\|_{L^1_x} \left(+ \|J^{\sigma-1}u_1\|_{L^1_x} \right) \right)$$

mit $J^\sigma = \mathcal{F}_x^{-1} \langle \xi \rangle^\sigma \mathcal{F}$ (Bessel-Potential-Operator).
Hierbei bestimmt die Phasenfunktion φ (in unserem Fall: $\varphi(\xi) = \pm(|\xi|^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$) die decay-Rate $\gamma(n)$ und auch den Gewinn bzw. Verlust an Ableitungen.

(2) Folgerung von (Str.) aus der time-decay-Abschätzung mit Hilfe einer Reihe von allgemeinen, d.h. von φ unabhängigen Argumenten: Interpolation, HLS-Ungleichung, TT^*-Argument, dazu später.

Der Beweis der Time-decay-Abschätzung für die KG- und
klassische Wellengleichung erweist sich als relativ schwierig (z.B. im Vergleich zur Schrödinger-Gleichung), u.a., weil man einen unvermeidlichen Verlust an Ableitungen verarbeiten muß. Es gibt im Prinzip

Zwei Zugänge:

(1) Der "physical-space approach". Hier verwendet man die in Abschnitt 2.1 bewiesenen Integraldarstellungen. Für den besonders einfachen Fall der Wellengleichung in drei Raumdimensionen habe ich diesen Zugang kurz skizziert. In geraden Raumdimensionen stößt man damit allerdings auf wesentliche Schwierigkeiten. Für den Fall rotationssymmetrischer Daten (und damit auch Lösungen) soll dieser Weg jedoch in den Übungen ein wenig weiter verfolgt werden.

(2) Der "Fourier-space approach", den ich im folgenden darstellen will. Auch hier erweisen sich die geraden Raumdimensionen als schwieriger, der Unterschied ist jedoch nicht gravierend. Zunächst einige

Allgemeine Argumente:

(1) Da die Operatoren $\cos(tA)$ und $\sin(tA)$ aus $e^{\pm itA}$ zusammengesetzt sind, genügt es, Abschätzungen der Form

$$\| e^{\pm itA} u_0 \|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-\gamma(n)} \| \mathcal{J}^\sigma u_0 \|_{L^1_x}$$

zu zeigen für

$$e^{\pm itA} u_0 (x) = C \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm it\varphi(\xi) + ix\xi} \hat{u}_0(\xi) d\xi$$

$$= K_t * u_0(x)$$

mit einer temperierten Distribution K_t, der sog. Fundamentallösung. Damit verzichten wir darauf, die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit auszunutzen, die auf Fourier-Seite nicht erkennbar ist.

(2) Abschätzungen in L^∞ oder in L^1 bereiten stets besondere Schwierigkeiten. Zum einen gilt der Sobolev'sche ES in seiner scharfen Form, d.i.

$$\dot{H}^s_p(\mathbb{R}^n) = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P} : \| f \|_{\dot{H}^s_p} := \| \mathcal{F}^{-1} |\xi|^s \mathcal{F} f \|_{L^p} < \infty \} \subset L^q(\mathbb{R}^n)$$

mit $s \geq 0$ und $s - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q}$ nur für $1 < p \leq q < \infty$. Zum anderen werden einige Interpolationssätze an diesen Endpunkten falsch. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, verwendet man sog. Littlewood-Paley-Zerlegungen:

~~Es seien φ, φ_k mit $k \in \mathbb{Z}$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit den folgenden Eigenschaften:~~

~~(i) $\operatorname{supp} \varphi_0 \subset \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2 \}$~~

Man wählt ein $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{4})$ und eine rotationssymmetrische Schwartz-Funktion ψ, so dass $\hat{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist mit den folgenden Eigenschaften: (60)

(i) $\hat{\psi} \geq 0$

(ii) $\mathrm{supp}(\hat{\psi}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 - \varepsilon_0 \leq |\xi| \leq 2\}$

(iii) $\hat{\psi}(\xi) = 1$ auf $\{1 \leq |\xi| \leq 2 - 2\varepsilon_0\}$

(iv) $\hat{\psi}(\xi) + \hat{\psi}(\frac{\xi}{2}) = 1$ auf $\{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 4 - 4\varepsilon_0\}$.

Allgemein: $\hat{\psi}_j(\xi) = \hat{\psi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$, d.h. $\psi_j(x) = 2^{nj}\psi(2^j x)$, $j \in \mathbb{Z}$,

so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}_j(\xi) = 1$.

Hierbei hat $\mathrm{supp}(\hat{\psi}_j)$ nur mit den Trägern der nächsten Nachbarn, also mit $\mathrm{supp}(\hat{\psi}_{j \pm 1})$ nichtleeren Durchschnitt, was zu

$$\hat{\psi}_j = \hat{\psi}_j \left(\hat{\psi}_{j-1} + \hat{\psi}_j + \hat{\psi}_{j+1}\right) =: \hat{\psi}_j \cdot \hat{\tilde{\psi}}_j \qquad (*)$$

führt und als "fast-Orthogonalität" bezeichnet wird.

Weiter definiert man

$$\hat{\phi} := 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\psi}_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ radial},$$

$$\hat{\phi}(\xi) = 1 \text{ auf } B_1(0), \quad \mathrm{supp}\, \hat{\phi} \subset \overline{B_2(0)},$$

so dass $\phi = \check{\hat{\phi}} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Soweit die Definitionen im "Fourier-Raum". Im x-Raum (oder "physical space") wird aus der Multiplikation mit $\hat{\psi}_j$ oder $\hat{\phi}$ durch inverse Fouriertransformation ein Fourier-Multiplikator bzw. Faltungsoperator:

$$P_{\Delta k} f := \mathcal{F}^{-1} \hat{\psi}_k \mathcal{F} f = (2\pi)^{-n/2} \psi_k * f \qquad k \in \mathbb{Z},\ f \in S'(\mathbb{R}^n)$$

$$P_0 f := \mathcal{F}^{-1} \hat{\phi} \mathcal{F} f = (2\pi)^{-n/2} \phi * f \qquad \text{"}$$

$$P_k f := P_0 f + \sum_{j=1}^{k} P_{\Delta j} f \qquad k \geq 0, \quad \text{"}$$

Die Identität (*) wird zu $P_{\Delta k} = P_{\Delta k}(P_{\Delta(k-1)} + P_{\Delta k} + P_{\Delta(k+1)})$, weshalb man (nicht ganz exakt) von Littlewood-Paley-Projektionen spricht. (Eine lineare Abbildung heißt Projektion, wenn $P^2 = P$ gilt.) Weitere Eigenschaften:

(1) Ist $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ und P eine LP-Projektion, so ist $Pf \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und Pf sowie alle Ableitungen $\nabla^\alpha Pf$ sind von moderatem Wachstum.

(2) Für $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ gilt mit Konvergenz in $S'(\mathbb{R}^n)$

$$f = P_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} P_{\Delta k} f = \lim_{k \to \infty} P_k f,$$

und, falls $0 \notin \operatorname{supp}(\hat{f})$ ist,

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_{\Delta k} f.$$

Def.: Für $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ heißt $S(f) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |P_{\Delta k} f|^2\right)^{1/2}$ die Littlewood-Paley Square function von f. Ferner definieren wir die Square function $\tilde{S} f := \left(|P_0 f|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |P_{\Delta k} f|^2\right)^{1/2}$.

Zum Beweis der Time-decay-Abschätzung werden wir den Anfangswert u_0 zerlegen in

$$u_0 = P_0 u_0 + \sum_{k \geq 1} P_{\Delta k} u_0 \qquad (\text{für KG, also } m > 0)$$

bzw. in $u_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_{\Delta k} u_0$ (für die Wellengleichung)

und die Abschätzung für die "dyadic pieces" $P_{\Delta k} u_0$ und $P_0 u_0$ zeigen. Der Satz, der uns an späterer Stelle erlauben wird, die Teile wieder zusammenzubauen, ist der

<u>Satz von Littlewood-Paley:</u> Es sei $1<p<\infty$. Dann werden auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ durch $\| Sf \|_p$ und $\| \tilde{S} f \|_p$ zu $\| f \|_p$ äquivalente Normen gegeben. Allgemeiner gilt für $1<p<\infty$, $s \in \mathbb{R}$ und $f \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$ sowie $g \in \dot{H}^s_p(\mathbb{R}^n)$:

$$\| f \|_{H^s_p} \sim \| P_0 f \|_p + \| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2sk} |P_{\Delta k} f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \|_p \quad \text{und}$$

$$\| g \|_{\dot{H}^s_p} \sim \| \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2sk} |P_{\Delta k} g|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \|_p \,.$$

<u>Bew.:</u> Grafakos, I, Sec. 5.1/6.1 und II Thm. 6.2.6

Für ein "dyadic piece" $P_{\Delta k} u_0$ werden wir dann zeigen, dass

$$\| e^{\pm itA} P_{\Delta k} u_0 \|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-\gamma(n)} C_{k,\sigma} \| u_0 \|_{L^1_x} \,, \qquad (*)$$

wobei wir rechts u_0 durch $\tilde{P}_{\Delta k} u_0$ mit $\tilde{P}_{\Delta k} = P_{\Delta(k-1)} + P_{\Delta k} + P_{\Delta(k+1)}$ ersetzen können. Nun ist

$$e^{\pm itA} P_{\Delta k} u_0 = K_{\pm t} * \check{\varphi}_k * u_0 \,,$$

so dass wir $(*)$ mit $\| f * g \|_\infty \le \| f \|_\infty \| g \|_1$ (Endpunkt der Young-Ungleichung) auf

$$\| K_{\pm t} * \check{\varphi}_k \|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-\gamma(n)} C_{k,\sigma}$$

zurückführen können, wobei

$$K_{\pm t} * \psi_k(x) = c \int_{\mathbb{R}^d} e^{\pm it\varphi(\xi) + ix\xi} \hat{\psi}_k(\xi) d\xi$$

mit $\hat{\psi}_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, radial. Für die Abschätzung von Schwingungsintegralen dieses Typs ("Oscillatory integrals", stellt die harmonische Analysis eine Reihe von Lemmata zur Verfügung, die in ihrer Gesamtheit als "Methode der stationären Phase" (engl.: "stationary phase method") bezeichnet werden.

Lemma 1 (Nonstationary phase lemma): Es seien $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C^\infty(\operatorname{supp}(\chi) + B_\varepsilon(0), \mathbb{R})$ mit $\nabla\varphi \neq 0$ auf $\operatorname{supp}(\chi)$ und $\lambda \geq 1$. Dann gibt es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C = C(N, \chi, \varphi)$, so dass

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\varphi(\xi)} \chi(\xi) d\xi \right| \leq C \lambda^{-N}$$

Bew.: Wir definieren den Operator $L := \frac{1}{i\lambda} \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2} \cdot \nabla$.

Dann ist $L e^{i\lambda\varphi(\xi)} = e^{i\lambda\varphi(\xi)}$, und durch partielle Integration unter Wegfall der Randterme erhalten wir den (formal) adjungierten Operator

$$L^* = \frac{i}{\lambda} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2} \, \cdot \right) = \frac{i}{\lambda} \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2} \, \cdot \right)$$

Damit ergibt sich

$$I(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(\xi)}\chi(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (L^N e^{i\lambda\varphi(\xi)})\cdot\chi(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(\xi)}(L^*)^N\chi(\xi)\,d\xi \qquad \text{und weiter}$$

$$|I(\lambda)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |(L^*)^N\chi(\xi)|\,d\xi = \lambda^{-N}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left[\nabla\cdot\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2}\right]^N\chi(\xi)\right|d\xi}_{=:C(N,\chi,\varphi)}. \qquad \square$$

<u>Diskussion:</u>

(1) Der Operator $(L^*)^N$ und damit die Konstante $C(N,\chi,\varphi)$ werden für große N recht unübersichtlich. Nach der Produktregel ist

$$\left[\nabla\cdot\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2}\right]^N\chi(\xi)$$

eine Summe von Termen der Art

$$\left(\prod_{k=1}^N \nabla^{\alpha_k}\frac{\partial_j\varphi(\xi)}{|\nabla\varphi(\xi)|^2}\right)\nabla^\beta\chi(\xi), \quad \left(\sum_{k=1}^N|\alpha_k|\right)+|\beta|=N.$$

Nehmen wir hiervon den Absolutbetrag, so können als Potenzen von $|\nabla\varphi(\xi)|$ hierbei auftreten:

$|\nabla\varphi(\xi)|^{-N}$, wenn $|\beta|=N$ und alle $\alpha_k=0$ sind,

$|\nabla\varphi(\xi)|^{-2N}$, wenn $\beta=0$ und alle $|\alpha_k|=1$ sind, denn

$$\partial_e\frac{\partial_j\varphi(\xi)}{|\nabla\varphi(\xi)|^2} = \frac{\partial^2_{je}\varphi(\xi)}{|\nabla\varphi(\xi)|^2} - 2\frac{\partial_j\varphi(\xi)\cdot\partial_e\varphi(\xi)\sum\partial^2_{je}\varphi(\xi)}{|\nabla\varphi(\xi)|^4}$$

also $|\ldots| \lesssim |\nabla\varphi(\xi)|^{-2}\cdot\|\nabla\varphi\|_{C^1}$

Alle Potenzen von $|\nabla\varphi(\xi)|$ zwischen den genannten können ebenfalls auftreten, aber keine anderen.

Da χ kompakten Träger hat und $\nabla\varphi(\xi)\neq 0$ gilt für alle $\xi\in\mathrm{supp}(\chi)$, existiert ein $\varepsilon_0>0$, so dass $|\nabla\varphi(\xi)|\geq\varepsilon_0$. Damit erhalten wir die grobe Abschätzung

$$C(N,\chi,\varphi)\leq\varepsilon_0^{-2N}P(\|\nabla\varphi\|_{C^N})\,\|\chi\|_{C^N}$$

mit einem Polynom P vom Grad N.

(2) Für die Ableitungen $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^k I(\lambda)$ gelten dieselben Abschätzungen mit lediglich anderen Konstanten, denn es ist

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(\xi)}\chi(\xi)\,d\xi = i^k\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(\xi)}\varphi(\xi)^k\chi(\xi)\,d\xi$$

ein Integral vom gleichen Typ mit $\varphi^k\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ anstelle von χ.

<u>Lemma</u> 2 (stationäre Phase): Für $\lambda\geq 1$ sei $I(\lambda)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\lambda\varphi}\chi\,d\xi$ (wie gehabt) mit $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi\in C^\infty(\mathrm{supp}(\chi)+B_\varepsilon(0),\mathbb{R})$.

Ferner gelte:
- $\nabla\varphi(\xi_0)=0$ für ein $\xi_0\in\mathrm{supp}(\chi)$
- $\nabla\varphi(\xi)\neq 0$ für alle $\xi\in\mathrm{supp}(\chi)\setminus\{\xi_0\}$
- $\det \mathrm{Hess}\,\varphi(\xi_0)\neq 0$.

Dann gibt es zu jedem $k\in\mathbb{N}_0$ eine Konstante $c=c(k,n,\chi,\varphi)$, so dass

$$\left| \frac{d^k}{d\lambda^k} e^{-i\lambda\varphi(\xi_0)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(\xi)} \chi(\xi) d\xi \right| \le C \lambda^{-\frac{n}{2}-k}.$$

Bew.: O.E. können wir annehmen, dass $\xi_0 = 0$ ist und $\operatorname{supp} \chi \subset B_1(0)$. (Verschieben und abschneiden, auf den Rest Lemma 1 anwenden!). Die Taylor-Formel gibt

$$\varphi(\xi) = \varphi(0) + \frac{1}{2} \langle \operatorname{Hess} \varphi(0)\xi, \xi \rangle + R_3(\xi)$$

mit $|R_3(\xi)| \lesssim |\xi|^3$ für $\xi \to 0$. Da $\operatorname{Hess} \varphi(0)$ regulär ist, haben wir (evtl. nach einer weiteren Verkleinerung) $|\nabla \varphi(\xi)| = | \operatorname{Hess} \varphi(0) \cdot \xi + O(|\xi|^2)| \gtrsim |\xi|$. Nun spalten wir das Integral in zwei Teile $I(\lambda) = I + II$ auf mit

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(\xi)} \chi(\xi) \cdot \chi_0(\lambda^{1/2}\xi) d\xi,$$

$$II = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(\xi)} \chi(\xi) \left(1 - \chi_0(\lambda^{\frac{1}{2}}\xi)\right) d\xi,$$

wobei χ_0 eine smooth cut-off function für $B_1(0)$ ist.

Dann ist

$$|I| \le \|\chi\|_\infty \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \chi_0(\underbrace{\lambda^{1/2}\xi}_{=\eta}) d\xi \quad = C \|\chi\|_\infty \lambda^{-n/2}.$$

$$d\xi = \lambda^{-n/2} d\eta$$

Für II argumentieren wir wie im Beweis von Lemma 1:

$$|II| \le \int_{\lambda^{-\frac{1}{2}} \le |\xi| \le 2} |(L^*)^N \chi(\xi)(1 - \chi_0(\lambda^{\frac{1}{2}}\xi))| d\xi$$

$$= \int_{\lambda^{-1/2} \le |\xi| \le 2} \lambda^{-N} \left| \left[\nabla \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2} \right]^N \chi(\xi)(1 - \chi_0(\lambda^{\frac{1}{2}}\xi)) \right| d\xi$$

Nun erhalten wir nach der Diskussion im Anschluss an Lemma 1 (67)
zwei Extremalbeiträge:

(i) Alle N Ableitungen in $(L^*)^N$ liegen auf $\chi(\xi)(1-\chi(\lambda^{1/2}\xi))$, was maximal einen Faktor $\lambda^{N/2}$ produziert. Dieser Beitrag ist also abschätzbar durch (beachte: $|\nabla\varphi(\xi)| \gtrsim |\xi|$!)

$$c\,\lambda^{-\frac{N}{2}} \cdot \int\limits_{\lambda^{-1/2}\le|\xi|\le 2} |\xi|^{-N}\,d\xi = c\,\lambda^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{\lambda^{-1/2}}^{2} r^{-N+\underbrace{d-1}_{\text{von der Jacobi-Determinante}}}\,dr$$

$$\lesssim \lambda^{-\frac{N}{2}} \cdot r^{-N+d}\Big|_{r=\lambda^{-\frac{1}{2}}} = \lambda^{-\frac{d}{2}}, \text{ sofern } N > d.$$

(ii) Jede Ableitung aus $(L^*)^N$ produziert einen (großen) Faktor $|\nabla\varphi(\xi)|^{-1}$, so dass man insgesamt auf $|\nabla\varphi(\xi)|^{-2N} \lesssim |\xi|^{-2N}$ kommt, Ableitungen auf $\chi(\xi)(1-\chi_0(\lambda^{1/2}\xi))$ gibt es dann nicht mehr. Eine obere Schranke für diesen Beitrag ist

$$c\,\lambda^{-N} \int\limits_{\lambda^{-1/2}}^{2} r^{-2N+d-1}\,dr \lesssim c\,\lambda^{-N}\, r^{-2N+d}\Big|_{r=\lambda^{-1/2}} = c\,\lambda^{-\frac{d}{2}}$$

Alle dazwischenliegenden Terme können ebenso kontrolliert werden. Damit ist die Beh. für $k=0$ gezeigt.

k Ableitungen nach λ produzieren im Integral einen zusätzlichen Faktor

$$|\varphi(\xi)-\varphi(0)|^k \lesssim |\xi|^{2k} \quad (\text{immer noch } \operatorname{supp}(\chi) \subset B_2(0)\,!)$$

Im Bereich $|\xi| \lesssim \lambda^{-\frac{1}{2}}$ (Teil I von $I(\lambda)$) gibt das unmittelbar einen zusätzlichen Faktor λ^{-k}.

Im Bereich $|\xi| \geq \lambda^{-1/2}$ haben wir Integrale der Form

$$\int_{\lambda^{-1/2} \leq |\xi| \leq 2} |(L^*)^N ((\varphi(\xi)-\varphi(0))^k \chi(\xi)(1-\chi_0(\lambda^{\frac{1}{2}}\xi)))| \, d\xi$$

abzuschätzen. Drei Fälle:

(a) Keine der Ableitungen aus $(L^*)^N$ fällt auf den zusätzlichen Faktor $(\varphi(\xi)-\varphi(0))^k$. Dann ist dieser wie vorher abzuschätzen durch $|\varphi(\xi)-\varphi(0)|^k \lesssim |\xi|^{2k} = r^{2k}$ in den Integralen der Extremalbeiträge (i) und (ii), was dort zu $\lambda^{-\frac{N}{2}} r^{-N+d+2k} \Big|^2_{r=\lambda^{-1/2}}$ bzw. $\lambda^{-N} r^{-2N+d+2k} \Big|^2_{r=\lambda^{-1/2}}$ führt, also zu einem zusätzlichen Faktor λ^{-k}, sofern wir $N > d+2k$ wählen.

(b) $\ell \leq N$ Ableitungen ~~aus~~ aus $(L^*)^N$ fallen auf $(\varphi(\xi)-\varphi(0))^k$ anstelle auf $\chi_0(\lambda^{\frac{1}{2}}\xi)$. Dies ergibt gegenüber der Abschätzung in (i) einen Korrekturfaktor $r^{2k-\ell} \cdot \lambda^{-\ell/2}$ und dort insgesamt wieder ~~auf~~ die Schranke

$$\lambda^{-\frac{N}{2}} r^{-N+d} \cdot r^{2k-\ell} \lambda^{-\ell/2} \Big|_{r=\lambda^{-1/2}} = \lambda^{-\frac{d}{2}-k}$$

(c) $\ell \leq N$ Ableitungen fallen auf $(\varphi(\xi)-\varphi(0))^k$ anstelle von $\frac{\partial_i \varphi(\xi)}{|\nabla\varphi(\xi)|^2}$. Der Verlust der r-Potenz an der ersten Stelle wird durch ihren Gewinn an der zweiten gestellt wieder ausgeglichen. Wie in (a) ist der decay $\sim \lambda^{-\frac{d}{2}-k}$.

Andere Fälle (z.B. Ableitungen von $\chi(\xi) \to (\varphi(\xi)-\varphi(0))^k$) waren bereits vorher "better behaved". $\square$

Anwendung (of interest in its own und zum weiteren Gebrauch)

Es sei σ das Flächenmaß auf $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ laut FT

$$\hat{\sigma}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|=1} e^{-ix\xi}\, dS_x = |\xi|^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(|\xi|),$$

letzteres haben wir wie gesagt in "Harmonische Analysis" ausgerechnet. Fragestellung: Gilt $\lim_{\xi \to \infty} \hat{\sigma}(\xi) = 0$? Wenn ja, wie schnell? Bzw.: Was ist die decay rate?

Klar ist: $|\hat{\sigma}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n} \cdot \int_{|x|=1} dS_x = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \omega_n$.

Andererseits ist wegen des Satzes von Plancherel

$$|\hat{\sigma}(\xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}$$

unmöglich, denn σ ist keine L^2-Funktion.

Für ungerade n haben sie die Frage in den Übungen bereits beantwortet, denn in diesem Fall ist ja $\frac{n}{2}-1$ halbganzzahlig, also gibt es Polynome $P, Q, P_\pm$, so dass

$$\left.\begin{aligned} J_{\frac{n}{2}-1}(r) &= \frac{c}{\sqrt{r}}\left(P\left(\tfrac{1}{r}\right)\sin(r) + Q\left(\tfrac{1}{r}\right)\cos(r)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}}\left(e^{ir}P_+\left(\tfrac{1}{r}\right) + e^{-ir}P_-\left(\tfrac{1}{r}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Beziehen wir den Faktor $|\xi|^{1-\frac{n}{2}}$ mit ein, so erhalten wir

$$\hat{\sigma}(\xi) = e^{i|\xi|}\omega_+(|\xi|) + e^{-i|\xi|}\omega_-(|\xi|)$$

mit $\omega_\pm(r) = r^{\frac{1-n}{2}} P_\pm\left(\frac{1}{r}\right)$ und also auch, mit gewissen Polynomen $P_{\pm,k}$:

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^k \omega_\pm(r) = r^{-\frac{n-1}{2}-k} \cdot P_{\pm,k}\left(\frac{1}{r}\right)$$

und damit haben wir auch die decay-rates

$$\left|\left(\frac{d}{dr}\right)^k \omega_\pm(r)\right| \lesssim r^{-\frac{n-1}{2}-k} \qquad (\text{sofern } r \geq 1 \text{ ist}).$$

Für gerades n bzw. Besselfunktionen mit ganzzahligem Index werden die Darstellungen (*) falsch (an die Stelle der Polynome treten Potenzreihen), aber die decay-Eigenschaft können wir dennoch zeigen.

Lemma 3: Es sei σ das Flächenmaß auf S^{n-1}. Dann gibt es Funktionen $\omega_\pm \in C^\infty((0,\infty))$ mit

$$\left|\left(\frac{d}{dr}\right)^k \omega_\pm(r)\right| \leq C_k \, r^{-\frac{n-1}{2}-k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0, r \geq 1,$$

so dass $\quad \hat{\sigma}(\xi) = e^{i|\xi|}\omega_+(|\xi|) + e^{-i|\xi|}\omega_-(|\xi|).$

Bew.: Es ist $\hat{\sigma}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|x|=1} e^{-ix\xi}\, dS_x$, wobei wir nach Rotation annehmen können, dass $\xi = |\xi| \cdot e_n$ ist, also $e^{-ix\xi} = e^{-ix_n|\xi|} = e^{\mp i|\xi|\sqrt{1-|x'|^2}}$, wobei $x = (x', x_n)$ und $\pm$ je nach Hemisphäre zu wählen sind. Mit der Standard-Parametrisierung ist dann das Integral

$$I(|\xi|) = \int\limits_{|x'|<1} e^{-i|\xi|\varphi(x')} + e^{i|\xi|\varphi(x')} \frac{dx'}{\sqrt{1-|x'|^2}}$$

mit $\varphi(x') = \sqrt{1-|x'|^2}$ als Phasenfunktion abzuschätzen.

Wir wählen eine glatte Abschneidefunktion $\chi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $\chi_0(x') = 1$ auf $B_{\frac{1}{3}}(0)$ und $\mathrm{supp}(\chi_0) \subset \overline{B_{\frac{2}{3}}(0)}$ und erhalten drei Beiträge (mit $\lambda = |\xi|$)

$$I_{NP}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda(-\varphi(x'))} \frac{\chi_0(x')}{\sqrt{1-|x'|^2}}\, dx'$$

$$I_{SP}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\varphi(x')} \frac{\chi_0(x')}{\sqrt{1-|x'|^2}}\, dx'$$

$$I_{eq}(\lambda) = \int_{|x'|<1} (e^{-i\lambda\varphi(x')} + e^{i\lambda\varphi(x')})(1-\chi_0(x')) \frac{dx'}{\sqrt{1-|x'|^2}}$$

Zu $I_{NP}(\lambda)$ stellen wir fest, dass $\nabla_{x'}(-\varphi(x')) = \nabla_{x'}(-\sqrt{1-|x'|^2})$ $= \frac{+x'}{\sqrt{1-|x'|^2}}$ genau eine Nullstelle hat, nämlich $x_0' = 0$, was dem Nordpol entspricht. Für die Hesse-Matrix erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(-\varphi(x')) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{+x_k}{\sqrt{1-|x'|^2}} = \frac{+\delta_{kj}}{\sqrt{1-|x'|^2}} + \frac{-x_k x_j}{(1-|x'|^2)^{3/2}},$$

und das heißt $\mathrm{Hess}(-\varphi)(0) = +E_{n-1}$. Weiter ist die Funktion $\chi(x') = \frac{\chi_0(x')}{\sqrt{1-|x'|^2}}$ in $C_c^\infty(B_1(0))$ bzw. ihre triviale Fortsetzung $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Damit sind alle Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt. Wg $\varphi(0) = 1$ erhalten wir einen Beitrag

$$I_{NP}(|\xi|) = e^{-i|\xi|} \cdot \omega_-(|\xi|),$$

wobei ω_- die behaupteten decay-Eigenschaften hat.

Dasselbe Vorgehen für den Südpol liefert

$$I_{sp}(|\xi|) = e^{i|\xi|}\, \omega_+(|\xi|),$$

wobei ω_+ ebenfalls die behaupteten decay-Eigenschaften hat.

Der äquatoriale Beitrag

$$I_{eq}(\lambda) = \int_{|x'|<1} \left(e^{-i\lambda\varphi(x')} + e^{i\lambda\varphi(x')}\right)(1-\chi_0(x'))\,\frac{dx'}{\sqrt{1-|x'|^2}}$$

sollte mit Lemma 1 abschätzbar sein, da $\nabla\varphi(x') \neq 0$ gilt im Träger von $1-\chi_0$. Technisches Problem: Durch die gewählte Parametrisierung tritt der "Äquator" der Sphäre hier als Rand $\{|x'| = 1\}$ auf, auf dem der Integrand nicht nur nicht verschwindet, sondern sogar singulär wird wegen des Faktors $\frac{1}{\sqrt{1-|x'|^2}}$.(*) Wir sollten uns also vergewissern, dass die partiellen Integrationen im Beweis von Lemma 1 in der hier vorliegenden Situation durchführbar sind ohne Randterme zu erzeugen, die den decay in λ zunichte machen würden. Es sei also für $\varphi(x') = \sqrt{1-|x'|^2}$

$$L = \frac{1}{i\lambda}\,\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2}\cdot\nabla \quad , \text{ dabei } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)$$

Dann ist $L\, e^{\pm i\lambda\varphi(x')} = \pm\, e^{\pm i\lambda\varphi(x')}$ und also

$$e^{i\lambda\varphi(x')} + e^{-i\lambda\varphi(x')} = L\left(e^{i\lambda\varphi(x')} - e^{-i\lambda\varphi(x')}\right).$$

(*) Es kann sich nur um ein technisches Problem handeln, weil der Äquator bzgl. der Sphäre kein Rand ist.

Damit:

$$I_{eq}(\lambda) = \int_{|x'|<1} \left(L\left(e^{i\lambda\varphi(x')} - e^{-i\lambda\varphi(x')}\right)\right)(1-\chi_0(x'))\,\frac{dx'}{\sqrt{1-|x'|^2}}$$

$$= \frac{1}{i\lambda}\int_{|x'|<1} \nabla\left(e^{i\lambda\varphi(x')} - e^{-i\lambda\varphi(x')}\right)\cdot\frac{\nabla\varphi(x')}{|\nabla\varphi(x')|^2}(1-\chi_0(x'))\,\frac{dx'}{\sqrt{1-|x'|^2}}$$

Dabei ist $\nabla\varphi(x') = \dfrac{-x'}{\sqrt{1-|x'|^2}}$ und also

$$\frac{\nabla\varphi(x')}{|\nabla\varphi(x')|^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-|x'|^2}} = \frac{-x'}{|x'|^2},$$

so dass das Integral sich etwas vereinfacht zu

$$I_{eq}(\lambda) = \frac{-1}{i\lambda}\cdot\int_{|x'|<1} \underbrace{\nabla\left(e^{i\lambda\varphi(x')} - e^{-i\lambda\varphi(x')}\right)\cdot\frac{x'}{|x'|}}_{=\frac{\partial}{\partial\nu}\left(e^{i\lambda\varphi} - e^{-i\lambda\varphi}\right)}\cdot\frac{1}{|x'|}(1-\chi_0(x'))\,dx'$$

Nehmen wir $\chi_0(x') = \chi(|x'|)$ an, haben wir in Polarkoordinaten (so dass $\frac{\partial}{\partial\nu}$ auf der Sphäre zu $\frac{\partial}{\partial r}$ wird!)

$$I_{eq}(\lambda) = \frac{-1\cdot C_n}{i\lambda}\int_{1/3}^{1} \frac{\partial}{\partial r}\left(e^{i\lambda\sqrt{1-r^2}} - e^{-i\lambda\sqrt{1-r^2}}\right)\cdot r^{n-3}(1-\chi(r))\,dr$$

$$= \frac{-1}{i\lambda}\cdot C_n\left[\left(e^{i\lambda\sqrt{1-r^2}} - e^{-i\lambda\sqrt{1-r^2}}\right)r^{n-3}(1-\chi(r))\right]_{\frac{1}{3}}^{1}$$

$$+ \frac{1}{i\lambda}\int_{|x'|<1}\left(e^{i\lambda\varphi(x')} - e^{-i\lambda\varphi(x')}\right)\cdot\nabla\cdot\left(\frac{x'}{|x'|^2}(1-\chi_0(x'))\right)dx'.$$

Dabei verschwindet der Randterm wie gewünscht, für $r = \frac{1}{3}$ wegen der Abschneidefunktion, für $r = 1$ wegen des Faktors $e^{i\lambda\varphi(x')} - e^{-i\lambda\varphi(x')}$. (Unsere Rechnung beruht also tatsächlich darauf, dass wir die Beiträge aus Nord und Süd zusammengefasst haben.) Wiederholen wir das Argument noch einmal: F4

$$I_{eq}(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \int_{|x'|<1} L\left(e^{i\lambda\varphi(x')} + e^{-i\lambda\varphi(x')}\right) \cdot \nabla \cdot \frac{x'}{|x'|^2}(1-\chi_0(x'))\, dx'$$

$$= \frac{-1}{\lambda^2} \int_{|x'|<1} \nabla\left(e^{i\lambda\varphi(x')} + e^{-i\lambda\varphi(x')}\right) \cdot \underbrace{\frac{\nabla\varphi(x')}{|\nabla\varphi(x')|^2}}_{= \frac{-x'}{|x'|^2} \cdot \sqrt{1-|x'|^2}} \cdot \nabla \frac{x'}{|x'|^2}(1-\chi_0(x'))\, dx' \,,$$

und nun "sorgt" der Faktor $\sqrt{1-|x'|^2}$ für das Verschwinden der Randterme bei der partiellen Integration. Ab jetzt alternierend.

Ableitungen von $I_{eq}(\lambda)$ nach λ produzieren im Integral einen Faktor $\sqrt{1-|x'|^2}^{\,k}$, der am Rand der Kugel verschwindet, und das Problem also entschärft und nicht verschärft.

Schließlich können wir $I_{eq}(|\xi|)$ nach Belieben mit $e^{\pm i|\xi|}$ multiplizieren und $e^{\mp i|\xi|} \cdot I_{eq}(|\xi|)$ in ω_+ oder ω_- aufsaugen. Damit ist Lemma 3 gezeigt. $\square$

Abschätzungen für die Klein-Gordon Gleichung:

Wir nehmen o.E. $t>0$ und $m=1$ an, so dass $\sqrt{\xi^2+m^2} = \langle\xi\rangle$ ist für die Phasenfunktion der KGG. (Die Bez. φ können wir dann anderweitig verwenden.) Einiges in diesem Teil gilt nicht für die Wellengleichung, insbes. wird der time-decay für $m=0$ schwächer ausfallen.

Die Funktionen $\hat{\Phi}$ und $\hat{\Psi}_k$ (für $k\geq 0$) seien im folgenden diejenigen aus der Littlewood-Paley-Zerlegung.

Lemma 4: Für $I_0^{\pm}(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi \pm it\langle\xi\rangle}\hat{\Phi}(\xi)\,d\xi$ gilt

$|I_0^{\pm}(x,t)| \leq C_n \langle t\rangle^{-n/2}$ mit einer von $x\in\mathbb{R}^n$ und $t>0$ unabhängigen Konstante C_n.

Bew.: Für $0<t\leq 1$ haben wir $|I_0^{\pm}(x,t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\Phi}(\xi)|\,d\xi$, und da $|\hat{\Phi}(\xi)|\leq 1$ und $\operatorname{supp}(\hat{\Phi}) \subset \overline{B_2(0)}$ ist, gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\Phi}(\xi)|\,d\xi \leq 2^n \cdot \frac{\omega_n}{n}.$$

Für $t\geq 1$ setzen wir $\varphi_{\pm}(\xi) = \pm\langle\xi\rangle + \frac{x}{t}\xi$, so dass $I_0^{\pm}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\varphi_{\pm}(\xi)}\hat{\Phi}(\xi)\,d\xi$. Kritische Stellen von $\varphi_{\pm}$ sind charakterisiert durch

$$0 \overset{!}{=} \nabla\varphi_{\pm}(\xi) = \pm\frac{\xi}{\langle\xi\rangle} + \frac{x}{t} \qquad (*)$$

Sind x und t gegeben, hat $(*)$ ~~höchstens~~ genau eine Lösung $\xi_0 \in$ ~~$\operatorname{supp}(\hat{\Phi})$~~ $\mathbb{R}^n$, denn es muss $\xi_0 \parallel \pm x$ und $\frac{|\xi_0|}{\langle\xi_0\rangle} = \frac{|x|}{t}$ sein.

Fall 1: $|\xi_0| \geq 3$. In diesem Fall ist $\frac{x}{t} = \pm \frac{\xi_0}{\langle \xi_0 \rangle}$ und (76)

daher für alle $\xi \in \operatorname{supp}(\hat{\Phi}) \subset \overline{B_2(0)}$

$$|\nabla \varphi_\pm(\xi)| = \left| \frac{\xi}{\langle \xi \rangle} - \frac{\xi_0}{\langle \xi_0 \rangle} \right| \geq \frac{|\xi_0|}{\langle \xi_0 \rangle} - \frac{|\xi|}{\langle \xi \rangle} \geq \frac{3}{\langle 3 \rangle} - \frac{2}{\langle 2 \rangle} > 0,$$

denn die Funktion $s \longmapsto \frac{s}{\langle s \rangle}$ ist auf $[0,\infty)$ streng monoton steigend.(*) Lemma 1 (nonstationary phase) ergibt einen beliebigen decay $\leq C_N t^{-N}$ mit C_N unabhängig von x und t (treten ie 2. Ableitungen von $\varphi_\pm$ nicht mehr auf!). Wähle $N = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Fall 2: $|\xi_0| \leq 3$. Für die Hesse-Matrix von $\varphi_\pm$ ergibt eine etwas länge Rechnung (beigefügt als (76a,b)):

$$\det \operatorname{Hess} \varphi_\pm(\xi_0) = \langle \xi_0 \rangle^{-n-2} \geq 10^{-\frac{n+2}{2}},$$

letzteres für $|\xi_0| \leq 3$. Die Hessesche ist also nicht nur regulär, sondern dies auf $\{\xi_0 \in \mathbb{R}^n : |\xi_0| \leq 3\}$ gleichmäßig in dem Sinne, dass

$$|\nabla \varphi_\pm(\xi)| \geq \varepsilon_n |\xi - \xi_0|$$

mit einem von $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 1$ und $\xi \in \operatorname{supp}(\hat{\Phi})$ unabhängigen $\varepsilon_n > 0$. (Diese Ungleichung wurde beim Beweis von Lemma 2 verwendet.) Lemma 2 gibt jetzt

$$|I_0^\pm(x,t)| \leq C_n \cdot t^{-\frac{n}{2}}.$$

Nimmt man nun die größere der beiden Konstanten, so ist die Beh. gezeigt. □

(*) Wenn es kein solches ξ_0 gibt, hat man $\left|\frac{x}{t}\right| \geq 1$ und $|\nabla \varphi_\pm(\xi)| \geq 1 - \frac{2}{\langle 2 \rangle}$.

$\varphi(\xi) = (1+\xi^2)^{\frac{1}{2}} = \langle \xi \rangle$

Berechnung der Hesse-Matrix und ihrer Determinante!

$$\nabla\varphi(\xi) = \frac{\xi}{\langle\xi\rangle}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\xi) = \frac{\xi_j}{\langle\xi\rangle}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\xi_j}{\langle\xi\rangle} = \frac{\delta_{ij}}{\langle\xi\rangle} - \frac{\xi_i\xi_j}{\langle\xi\rangle^3} = \langle\xi\rangle^{-3}\left(\delta_{ij}\langle\xi\rangle^2 - \xi_i\xi_j\right)$$

$$\operatorname{Hess}\varphi(\xi) = \langle\xi\rangle^{-3}\begin{pmatrix} \langle\xi\rangle^2-\xi_1^2 & -\xi_1\xi_2 & \cdots & -\xi_1\xi_n \\ -\xi_1\xi_2 & \langle\xi\rangle^2-\xi_2^2 & -\xi_2\xi_3 \cdots & -\xi_2\xi_n \\ \vdots & & & \\ -\xi_1\xi_n & & & \langle\xi\rangle^2-\xi_n^2 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann aus jeder Spalte und jeder Zeile einen Faktor ξ_i bzw ξ_j herausziehen, wenn man die Det. berechnen will, also

$$\det\operatorname{Hess}\varphi(\xi) = \langle\xi\rangle^{-3n}\cdot\prod_{k=1}^{n}\xi_k^2\cdot\det(H_0) \quad (*)$$

für

$$H_0 = \begin{pmatrix} \frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_1^2}-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_2^2}-1 & -1 \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_n^2}-1 \end{pmatrix}$$

Jetzt Zeilenumformungen (solche, die det nicht verändern!):

① $\to$ ① $-$ ②, ② $\to$ ② $-$ ③, ... $(n-1) \to (n-1) - (n)$, (n) bleibt.

$$H_0 \sim \tilde{H}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_1^2} & -\frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_2^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_2^2} & -\frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_3^2} & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ & & & & \frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_{n-1}^2} & -\frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_n^2} \\ 0 & & & & & \\ -1 & \cdots & & & -1 & \frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_n^2}-1 \end{pmatrix}$$

Haben gleiche Determinante

Nun sei H_k die rechte untere $k\times k$-Teilmatrix von $\tilde{H}_0$.

Bereits gezeigt sei, dass (76b)

$$\det H_k = \frac{\langle\xi\rangle^{2k}}{\prod_{l=0}^{k-1} \xi_{n-l}^2} \left(1 - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\xi_{n-l}^2}{\langle\xi\rangle^2}\right),$$

was für $k=1$ ablesbar ist. Dann erhält man durch Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\det \tilde{H}_0 = \frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_1^2} \cdot \det H_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot (-1) \cdot \det L_{n-1}$$

und $L_{n-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_2^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & -\frac{\langle\xi\rangle^2}{\xi_n^2} \end{pmatrix}$, also $\det L_{n-1} = (-1)^{n-1} \dfrac{\langle\xi\rangle^{2(n-1)}}{\prod_{j=2}^{n} \xi_j^2}$

und damit

$$\det \tilde{H}_0 = \frac{\langle\xi\rangle^{2n}}{\prod_{l=0}^{n-1} \xi_{n-l}^2} \left(1 - \sum_{l=0}^{n-2} \frac{\xi_{n-l}^2}{\langle\xi\rangle^2}\right) - \frac{\langle\xi\rangle^{2n}}{\prod_{j=1}^{n} \xi_j^2} \cdot \frac{\xi_1^2}{\langle\xi\rangle^2}$$

$$= \frac{\langle\xi\rangle^{2n}}{\prod_{j=1}^{n} \xi_j^2} \left(1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{\xi_l^2}{\langle\xi\rangle^2}\right)$$

was zugleich der Ind.-Schritt und das Endergebnis ist

$$= \frac{\langle\xi\rangle^{2(n-1)}}{\prod_{j=1}^{n} \xi_j^2} = \det H_0$$

Beim Einsetzen in (*) kürzt sich $\prod_{j=1}^{n} \xi_j^2$ und das erstaunlich einfache Resultat ist

$$\underline{\operatorname{Hess} \varphi(\xi) = \langle\xi\rangle^{-3n+2n-2} = \langle\xi\rangle^{-n-2}}$$

Proposition 1: Es seien $n \geq 2$ und, für $k \geq 0$,

$$I_k^{\pm}(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi \pm it\langle\xi\rangle} \hat{\varphi}_k(\xi)\, d\xi .$$

Dann existieren Konstanten C_n, unabhängig von x, t und k, so dass $|I_k^{\pm}(x,t)| \leq C_n \cdot 2^{k(\frac{n}{2}+1)} t^{-\frac{n}{2}}$.

Bem.: Gilt auch für $n=1$; dieser Fall lässt sich deutlich einfacher mit Hilfe des "Van der Corput - Lemmas"

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(\xi)} \psi(\xi)\, d\xi \right| \lesssim \lambda^{-\frac{1}{k}} \left(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(s)|\, ds \right)$$

einsehen. (Hierbei ist $\lambda \geq 1$ und $|\varphi^{(k)}(\xi)| \geq 1$ vorausgesetzt, im Fall $k=1$ zusätzlich die Monotonie von φ'.) Das werden wir in den Übungen (Blatt 8) besprechen.

Bew.: (1) Allgemeine Argumente

Zunächst zwei Umbenennungen:

$\lambda := 2^k$, zumindest z.T. soll mit diesem λ die (nicht-)stationäre Phasen-Methode angewendet werden

$\chi_0\left(\frac{|\xi|}{\lambda}\right) := \hat{\varphi}_k(\xi)$. Dann ist $\chi_0 \in C_c^\infty((0,\infty))$ mit $\operatorname{supp}(\chi_0) \subset [\frac{1}{2}, 2]$.

Dann führen wir in den Integralen $I_k^{\pm}$ Polarkoordinaten mit radialer Variable ρ ein. Dann ist

$$I_\lambda^\pm(x,t) = \int_0^\infty \int_{|\xi|=\rho} e^{ix\xi}\, dS_\xi \; e^{\pm it\langle\rho\rangle} \chi_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) d\rho$$

$$= \int_0^\infty \int_{|\xi|=1} e^{i\rho x\xi}\, dS_\xi \; e^{\pm it\langle\rho\rangle} \chi_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \rho^{n-1}\, d\rho$$

und mit $r = \frac{\rho}{\lambda}$, so dass $\rho^{n-1} d\rho = \lambda^n r^{n-1} dr$

$$\ldots = \lambda^n \cdot \int_0^\infty \underbrace{\int_{|\xi|=1} e^{i\lambda r x\xi}\, dS_\xi}_{=(2\pi)^{n/2}\hat{\sigma}(\lambda r x)} \; e^{\pm it\langle\lambda r\rangle} \chi_0(r)\, r^{n-1}\, dr$$

So dass nach Lemma 3

$$\ldots \cong \lambda^n \int_0^\infty \left(e^{i\lambda r|x|}\omega_+(\lambda r|x|) + e^{-i\lambda r|x|}\omega_-(\lambda r|x|)\right) \cdot e^{\pm it\langle\lambda r\rangle} \chi_0(r)\, r^{n-1}\, dr\,,$$

wobei $\left|\left(\frac{d}{d\rho}\right)^e \omega_\pm(\rho)\right| \leq C_e\, \rho^{-\frac{n-1}{2}-e}$ für $\rho \geq 1$ und $\omega_\pm$ auf $[0,1]$ beschränkt ist.

Beachtet man, dass der Absolutbetrag in $\mathbb{C}$ sich bei komplexer Konjugation nicht ändert, können wir auf das $\pm$ in $e^{\pm it\langle\lambda r\rangle}$ verzichten, und es bleiben im folgenden die eindimensionalen Integrale

$$J_\lambda^\pm(x,t) := \int_0^\infty e^{it\langle\lambda r\rangle \pm i\lambda r|x|}\, \omega_\pm(\lambda|x|r)\, \chi_0(r)\, r^{n-1}\, dr$$

abzuschätzen. Hierfür ist zu zeigen:

$$\boxed{\left|J_\lambda^\pm(x,t)\right| \leq C_n \cdot \lambda^{1-\frac{n}{2}}\, t^{-\frac{n}{2}} \qquad (!)}$$

(2) Phasenfunktionen

Wir schreiben die Exponentialfunktionen in den Integralen $J_\lambda^\pm$ als

$$\exp(it\langle\lambda r\rangle \pm i\lambda|x|r) =: \exp(i\lambda\varphi_\pm(r)) \quad \text{mit}$$

$$\varphi_\pm(r) := \varphi_\pm(r;\lambda,t,|x|) = \frac{t}{\lambda}\langle\lambda r\rangle \pm |x| r\,,$$

$$\varphi_\pm'(r) = \frac{t}{\lambda}\,\frac{\lambda^2 r}{\langle\lambda r\rangle} \pm |x| = t\cdot\frac{\lambda r}{\langle\lambda r\rangle} \pm |x|$$

$$\varphi_\pm''(r) = t\lambda\left(\frac{1}{\langle\lambda r\rangle} - \frac{\lambda^2 r}{\langle\lambda r\rangle^3}\right) = \frac{t\lambda}{\langle\lambda r\rangle^3} \sim \frac{t}{\lambda^2}, \text{ da } r\sim 1$$

und

$$\varphi_\pm^{(k+2)}(r) = t\cdot\lambda\cdot\left(\frac{d}{d\varrho}\right)^k \langle\varrho\rangle^{-3}\Big|_{\varrho=\lambda r}\cdot\lambda^k\,,$$

so dass $|\varphi_\pm^{(k+2)}(r)| \lesssim t\cdot\lambda^{k+1}\langle\lambda r\rangle^{-3-k} \lesssim \frac{t}{\lambda^2}$

(3) Fall 1: $t \lesssim |x|$. Wir schreiben

$$J_\lambda^\pm(x,t) = (\lambda|x|)^{-\frac{n-1}{2}}\cdot\int_0^\infty e^{i\lambda\varphi_\pm(r)} f_\pm(\lambda|x|r)\,\chi_0(r)\,r^{n-1}\,dr$$

wobei $\left|\left(\frac{d}{dr}\right)^\ell f_\pm(\lambda|x|r)\right| = |(\lambda|x|)^\ell\cdot f_\pm^{(\ell)}(\lambda|x|r)|$

$$= \left|(\lambda|x|)^{\frac{n-1}{2}+\ell}\cdot\omega_\pm^{(\ell)}(\lambda|x|r)\right| \lesssim_\ell 1$$

Dann ergibt eine simple Dreiecksungleichung

$$|J_\lambda^\pm(x,t)| \lesssim (\lambda t)^{-\frac{n-1}{2}}\cdot\int_{1/2}^2 \text{const}\,dr \lesssim (\lambda t)^{-\frac{n-1}{2}},$$

was unter der zusätzlichen Annahme $t\leq\lambda$ bereits für $|J_\lambda^\pm(x,t)| \lesssim \lambda^{1-\frac{n}{2}}t^{-\frac{n}{2}}$, also (!) ausreicht.

Wenn $t \geq \lambda$ ist, definieren wir

$$\tilde{\varphi}_\pm(r) = c\,\frac{\lambda^2}{t}\,\varphi_\pm(r)$$

mit einer Konstanten c, ausreichend groß, so dass $\tilde{\varphi}_\pm''(r) \geq 1$. Ferner haben wir $\lambda\varphi_\pm(r) = \frac{t}{c\lambda}\cdot\tilde{\varphi}_\pm(r)$,

so dass

$$J_\lambda^\pm(x,t) = (\lambda|x|)^{-\frac{n-1}{2}}\cdot\int_0^\infty e^{i\underbrace{\frac{t}{c\lambda}}_{\geq\frac{1}{c},\ \text{das reicht.}}}\cdot f_\pm(\lambda|x|r)\,\chi_0(r)\,r^{n-1}dr$$

Auf das Integral können wir jetzt das Van der Corput-Lemma anwenden mit $k=2$, $\frac{t}{c\lambda}$ anstelle von λ und $\psi(r) = f_\pm(\lambda|x|r)\chi_0(r)r^{n-1}$. Das ergibt als obere Schranke für das Integral

$$\left|\int_0^\infty \ldots dr\right| = \left|\int_{\frac{1}{2}}^2 \ldots dr\right| \lesssim \left(\frac{\lambda}{t}\right)^{1/2}\Big(\underbrace{|\psi(2)|}_{=0} + \int_{\frac{1}{2}}^2 |\psi'(s)|ds\Big)$$

$$\lesssim \left(\frac{\lambda}{t}\right)^{1/2},$$ da $|\psi'(s)| \leq \text{const}$ nach der obigen Bemerkung zu $f_\pm$.

Beachten wir schließlich wieder $t \lesssim |x|$, haben wir auch in diesem Subcase

$$|J_\lambda^\pm(x,t)| \lesssim (\lambda t)^{-\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda}{t}\right)^{1/2} = \lambda^{1-\frac{n}{2}}t^{-\frac{n}{2}},$$

also (!), und damit ist die Diskussion von Fall 1 abgeschlossen.

(4) Fall 2: $|x| << t$

Hier ist wg. $\varphi_\pm'(r) = \frac{t}{\langle \lambda r \rangle}\lambda r \pm |x|$ und $\frac{1}{2} \le r \le 2$ in supp(χ_0)

im Integrationsbereich $|\varphi_\pm'(r)| \gtrsim t$.

Andererseits hatten wir für die höheren Ableitungen

$$|\varphi_\pm^{(l)}(r)| \lesssim \frac{t}{\lambda^2} \qquad (l \ge 2) \qquad \text{festgestellt.}$$

Zwischenbemerkung: Im Fall der Wellengleichung $(m=0)$ hat man anstelle der Phasenfunktion $\varphi_\pm(r) = \frac{t}{\lambda}\langle \lambda r \rangle \pm r|x|$ die einfachere $\varphi_\pm^w(r) = tr \pm |x| r$ mit $(\varphi_\pm^w)'(r) = t \pm |x|$, $|(\varphi_\pm^w)'(r)| \gtrsim t$ und $(\varphi_\pm^w)^{(l)}(r) = 0$. Im folgenden wird ein "nonstationary phase"-Argument verwendet, was nur auf den beiden Ungleichungen

$$|\varphi_\pm'(r)| \gtrsim t \qquad \text{und} \qquad |\varphi_\pm^{(l)}(r)| \lesssim t \quad (l \ge 2)$$

beruht. Das folgende gilt also auch für die Wellengleichung.

Wir verwenden den Operator $L = \frac{1}{i\lambda} \frac{1}{\varphi_\pm'(r)} \frac{d}{dr}$ mit formal adjungiertem $L^* = \frac{1}{i\lambda} \frac{d}{dr} \frac{1}{\varphi_\pm'(r)}$. Dann ist wieder

$$L^N e^{i\lambda \varphi_\pm(r)} = e^{i\lambda\varphi_\pm(r)}, \qquad N \text{ beliebig}$$

und daher

(P2)

$$J_\lambda^{\pm}(x,t) = \int_0^\infty (L^N e^{i\lambda\varphi_\pm(r)})\, \omega_\pm(\lambda r|x|)\, \chi_0(r)\, r^{n-1}\, dr$$

$$= \int_0^\infty e^{i\lambda\varphi_\pm(r)} (L^*)^N (\omega_\pm(\lambda r|x|)\, \chi_0(r)\, r^{n-1})\, dr$$

und also

$$|J_\lambda^{\pm}(x,t)| \leq \lambda^{-N} \cdot \int_0^\infty \left|\left(\frac{d}{dr}\,\frac{1}{\varphi_\pm'(r)}\right)^N (\omega_\pm(\lambda r|x|)\, \chi_0(r)\, r^{n-1})\right| dr.$$

Allgemein ist $\left(\frac{d}{dr}\,\frac{1}{\varphi'(r)}\right)^N$ eine Summe von Termen

der Art $\quad \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{\varphi'(r)}\right)^{(\ell_j)} \cdot \left(\frac{d}{dr}\right)^{N-|\ell|} \quad (0 \leq |\ell| \leq N),$

wobei wiederum

$$\left(\frac{1}{\varphi'(r)}\right)' = -\frac{1}{\varphi'(r)^2}\varphi''(r), \quad \left(\frac{1}{\varphi'(r)}\right)'' = -\frac{\varphi'''(r)}{(\varphi'(r))^2} + 2\,\frac{\varphi''(r)^2}{\varphi'(r)^3}$$

$$\ldots \left(\frac{1}{\varphi'(r)}\right)^{(\nu)} = C_1\,\frac{\varphi^{(\nu+1)}(r)}{\varphi'(r)^2} + C_2\,\frac{\varphi^{(\nu)}(r)\,\varphi''(r)}{\varphi'(r)^3} + \ldots$$

$$\ldots C_\nu\,\frac{\varphi''(r)^\nu}{\varphi'(r)^{\nu+1}}$$

Für $\varphi_\pm$ mit den eingangs festgestellten Ungleichungen

also stets $\left|\left(\frac{1}{\varphi'(r)}\right)^{(\ell_j)}\right| \lesssim \frac{1}{t}$ und daher

$\left|\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{\varphi'(r)}\right)^{(\ell_j)}\right| \lesssim t^{-N}$. Andererseits ist (für $\frac{1}{2} \leq r \leq 2$),

$$\left|\left(\frac{d}{dr}\right)^{N-|\ell|} (\omega_\pm(\lambda r|x|)\, \chi_0(r) \cdot r^{n-1})\right| \leq C_N,$$

so dass wir insgesamt erhalten

$$|J_\lambda^\pm(x,t)| \le C_N \lambda^{-N} t^{-N},$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt werden kann. Damit ist (!) also auch im Fall 2 gezeigt, und also der Beweis der Prop. 1 abgeschlossen. $\square$

<u>Modifikation für die Wellengleichung</u>

<u>Lemma</u> 5: Es sei $n \ge 2$ und $I_0^\pm(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi \pm it|\xi|} \hat{\varphi}_0(\xi)\, d\xi$.

Dann gilt $|I_0^\pm(x,t)| \le C_n \min\left(\|\hat{\varphi}_0\|_1,\ t^{-\frac{n-1}{2}}\right)$

<u>Bew.</u>: Die erste Ungleichung folgt aus

$$|I_0^\pm(x,t)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}_0(\xi)|\, d\xi = \|\hat{\varphi}_0\|_1$$

Für die zweite sind wieder die Fälle

1. $|x| \gtrsim t$ und

2. $|x| << t$

zu unterscheiden, wobei wir für den Fall 2 im letzten Schritt des Beweises von Prop. 1 bereits festgestellt hatten, dass

$$\text{Für } |x| << t \implies |I_0^\pm(x,t)| \le C_N t^{-N}$$

für beliebig großes $N \in \mathbb{N}$.

Im Fall 1 ergibt die Rechnung im Beweis von Prop. 1,

dass mit $\varphi_\pm^w(r) = r(t \pm |x|)$ gilt (mit $\lambda = 1$)

$$|I_0^\pm(x,t)| \le \sum_\pm \left| \int_0^\infty e^{i\varphi_\pm^w(r)} \omega_\pm(r|x|) \chi_0(r) r^{n-1} dr \right|$$

$$\lesssim |x|^{-\frac{n-1}{2}} \sum_\pm \int_0^\infty \Big| \underbrace{|x|^{\frac{n-1}{2}} \omega_\pm(r|x|)}_{|\ldots| \le \text{const}} \chi_0(r) r^{n-1} \Big| dr$$

$$\lesssim |x|^{-\frac{n-1}{2}} \lesssim t^{-\frac{n-1}{2}},$$

wobei die implizite Konstante nicht von x und t abhängt. □

Folgerung: Es sei $n \ge 2$ und, für $k \in \mathbb{Z}$,

$$I_k^\pm(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi \pm it|\xi|} \hat{f}_k(\xi) d\xi .$$

Dann gilt

$$|I_k^\pm(x,t)| \le C_n \cdot \min\left(\|\hat{f}_0\|_1 \cdot 2^{nk}, \; 2^{k\frac{n+1}{2}} t^{-\frac{n-1}{2}} \right).$$

Bew.: Es ist $\hat{f}_k(\xi) = \hat{f}_0\left(\frac{\xi}{2^k}\right)$, und die Substit. $\eta = \frac{\xi}{2^k}$,

also $d\xi = 2^{nk} d\eta$ ergibt

$$I_k^\pm(x,t) = 2^{nk} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2^k x\eta \pm it2^k|\eta|} \hat{f}_0(\eta) d\eta$$

Hieraus folgt $|I_k^\pm(x,t)| \le 2^{nk} \cdot \|\hat{f}_0\|_1$ und, mit dem zweiten Teil von Lemma 5, angewendet mit $2^k t$ anstelle von t:

$$|I_k^\pm(x,t)| \le C_n \cdot 2^{k \cdot n} (2^k t)^{-\frac{n-1}{2}} = 2^{k\frac{n+1}{2}} \cdot t^{-\frac{n-1}{2}},$$

□

wie behauptet.

Jetzt müssen wir die Abschätzungen der dyadischen Teilstücke zu einer Abschätzung zusammenbauen. Dazu verwenden wir zunächst den

Interpolationssatz von Riesz-Thorin(*): Gegeben seien

- zwei Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{C}, \nu)$;
- Hölder-Exponenten $1 \leq p_0, p_1, p, q_0, q_1, q \leq \infty$,
- ein dichter linearer Teilraum $D \subseteq L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu)$ und
- eine lineare Abbildung $T : D \to L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$,

die für $i \in \{0, 1\}$ den Stetigkeitsabschätzungen

$$\|Tf\|_{L^{q_i}(\nu)} \leq M_i \, \|f\|_{L^{p_i}(\mu)} \qquad (\forall f \in D)$$

genügt. Ferner gelte für ein $\theta \in [0,1]$, dass

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Dann besitzt T eine eindeutig bestimmte, ebenfalls mit T bezeichnete Fortsetzung $T : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$. Hierfür gilt die Abschätzung

$$\|Tf\|_{L^q(\nu)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \, \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Bem.: (1) Die Hölder-Exponenten 1 und ∞ sind zugelassen.
(2) Der Satz ist zwar nicht "scharf" in dem Sinne, dass er die beste Konstante ergeben würde. Er liefert aber mit dem Faktor $M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$ eine gute Kontrolle über die Operatornormen.

---

* Vorlesung "Harmonische Analysis", Abschnitt 2.1, oder Grafakos: Classical Fourier Analysis, Thm. 1.3.4.

Auf welche linearen Abbildungen können wir diesen Satz nun anwenden? Betrachten wir dazu unsere Klein-Gordon-Abschätzungen!

Lemma 4: $|I_0^{\pm}(x,t)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi \pm it\langle\xi\rangle} \hat{\phi}(\xi)\,d\xi\right| \le C_n \langle t\rangle^{-n/2} \le C_n |t|^{-n/2}$

Prop. 1: Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$|I_k^{\pm}(x,t)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi \pm it\langle\xi\rangle} \hat{\varphi}_k(\xi)\,d\xi\right| \le C_n |t|^{-n/2} \cdot 2^{k(\frac{n}{2}+1)}$$

Nun seien $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $A = (I-\Delta)^{1/2}$ und P_0 sowie $P_{\Delta k}$ die Littlewood-Paley-„Projektionen". Dann haben wir

$$\| e^{\pm itA} P_0 u_0 \|_{L^\infty_x} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi \pm it\langle\xi\rangle} \hat{\phi}_0(\xi)\, \hat{u}_0(\xi)\,d\xi \right|$$

$$= C_n \| I_0^{\pm}(\cdot,t) * u_0 \|_{L^\infty_x} \le C_n \| I_0^{\pm}(\cdot,t)\|_{L^\infty_x} \|u_0\|_{L^1_x}$$

Faltungssatz

Lemma 4

$$\le C_n \cdot t^{-n/2} \|u_0\|_{L^1_x}$$

und ebenso, unter Verwendung von Prop. 1:

$$\| e^{\pm itA} P_{\Delta k} u_0 \|_{L^\infty_x} \le C_n\, 2^{k(\frac{n}{2}+1)} t^{-n/2} \|u_0\|_{L^1_x}$$

Andererseits haben wir aufgrund des Satzes von Plancherel für $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\| e^{\pm itA} P_0 u_0 \|_{L^2_x} = \|u_0\|_{L^2_x} \quad \text{und} \quad \| e^{\pm itA} P_{\Delta k} u_0 \|_{L^2_x} = \|u_0\|_{L^2_x}$$

Damit haben wir Stetigkeitsabschätzungen für

$$T_0 : u_0 \mapsto e^{\pm itA} P_0 u_0 \quad \text{und für}$$

$$T_k : u_0 \mapsto e^{\pm itA} P_{\Delta k} u_0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

wobei $t > 0$ fest ist. Zum einen (mit $j \in \mathbb{N}_0$!)

$$T_j : L^2(\mathbb{R}^n) \supset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

mit Operatornorm $\| T_j \|_{2 \to 2} = 1$ und zum anderen

$$T_j : L^1(\mathbb{R}^n) \supset L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

mit Operatornorm $\| T_j \|_{1 \to \infty} \leq C_n \cdot 2^{j(\frac{n}{2}+1)} t^{-n/2}$.

Der Satz von Riesz-Thorin gibt uns nun, dass die

$$T_j : L^p(\mathbb{R}^n) \supset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$$

stetig (und eindeutig fortsetzbar) sind, wenn für ein $\theta \in [0,1]$ gilt

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \theta \quad \text{und} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2},$$

also wenn $2 \leq q \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also $p = q'$.

In diesem Fall ist $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1-\theta}{2} = \frac{1}{q'} - \frac{1}{q} = 1 - \frac{2}{q}$.

Mit $1 = M_0$ und $C_n \cdot 2^{j(\frac{n}{2}+1)} t^{-n/2}$ als oberer Schranke für M_1 liefert uns der Satz von Riesz-Thorin also das folgende:

Corollar 1: Es seien $2 \le q \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $t \neq 0$. Dann gelten die Abschätzungen

$$\| e^{itA} P_0 u_0 \|_{L^q_x} \le C_n |t|^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \|u_0\|_{L^{q'}_x}$$

und

$$\| e^{itA} P_{\Delta k} u_0 \|_{L^q_x} \le C_n\, 2^{k(n+2)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} |t|^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \|u_0\|_{L^{q'}_x}.$$

Entsprechend erhalten wir für die Wellengleichung:

Corollar 2: Es seien $2 \le q \le \infty$, $k \in \mathbb{Z}$, $t \neq 0$. Dann gilt

$$\| e^{it(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} P_{\Delta k} u_0 \|_{L^q_x} \le C_n\, 2^{k(n+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} |t|^{-(n-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \|u_0\|_{L^{q'}_x}.$$

Mit Hilfe des Satzes von Littlewood-Paley können wir schließlich das Hauptergebnis dieses Abschnitts zeigen.

Satz 1: (a) Klein-Gordon-Gleichung. Es seien $n \ge 1$, $2 \le q < \infty$, $t \neq 0$ und $s = (n+2)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})$. Dann gilt

$$\| e^{itA} u_0 \|_{L^q_x} \le C_n |t|^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \|u_0\|_{H^{s,q'}_x}.$$

(b) Wellengleichung: Es seien $n \ge 2$, $2 \le q < \infty$, $t \neq 0$ und $s = (n+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})$. Dann gilt

$$\| e^{it(-\Delta)^{1/2}} u_0 \|_{L^q_x} \le C_n |t|^{-(n-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \|u_0\|_{\dot{H}^{s,q'}}.$$

Bem.: Letzteres gilt auch für die KGG, wenn man die homogene durch die inhomogene Norm ersetzt.

Bew. von Teil (a), (b) geht ähnlich. Wir setzen

$$Q_0 = P_0, \quad Q_k = P_{\Delta k} \ (k \in \mathbb{N}), \quad \tilde{Q}_0 = Q_0 + Q_1, \quad \tilde{Q}_k = Q_{k-1} + Q_k + Q_{k+1} \ (= \tilde{P}_{\Delta k}).$$

Dann ist $Q_k = \tilde{Q}_k Q_k = Q_k \tilde{Q}_k$, und nach dem Satz von Littlewood-Paley gilt für $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1,\infty)$, dass

$$\|f\|_{H^{s,p}} \sim \Big\| \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |Q_k f|^2 2^{sk} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p}.$$

Mit $s=0$, $p=q$ und $f = e^{itA} u_0$ ergibt das

$$\| e^{itA} u_0 \|_{L^q_x} \sim \Big\| \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |Q_k e^{itA} u_0|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^q_x}$$

$$= \Big\| \sum_{k \in \mathbb{N}_0} |e^{itA} Q_k u_0|^2 \Big\|_{L^{q/2}_x}^{\frac{1}{2}} \qquad ([e^{itA}, Q_k] = 0).$$

Da wir $q \geq 2$ vorausgesetzt haben, ist $\| \ \|_{L^{q/2}_x}$ eine Norm, und wir können mit einer Dreiecksungl. fortfahren:

$$\ldots \leq \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \| |e^{itA} Q_k u_0|^2 \|_{L^{q/2}_x} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \| e^{itA} Q_k \tilde{Q}_k u_0 \|_{L^q_x}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (Q_k = \tilde{Q}_k\,!)$$

$$\leq C_4 |t|^{-n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{2sk} \| \tilde{Q}_k u_0 \|_{L^{q'}_x}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

wobei wir im letzten Schritt das Corollar 1 angewendet haben. Nun fassen wir den letzten Faktor auf als gemischte L^p-L^q-Norm, genauer

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{2sk}\,\|\tilde{Q}_k u_0\|^2_{L^{q'}_x}\Big)^{\frac12} = \big\|\big(2^{sk}|\tilde{Q}_k u_0|\big)_{k\in\mathbb{N}_0}\big\|_{\ell^2(\mathbb{N}_0,L^{q'}_x)}$$

$$\overset{(*)}{\leq} \big\|\big(2^{sk}|\tilde{Q}_k u_0|\big)_{k\in\mathbb{N}_0}\big\|_{L^{q'}_x(\ell^2(\mathbb{N}_0))} \qquad (\text{da } q'\leq 2\,!)$$

$$= \Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{2sk}|\tilde{Q}_k u_0|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^{q'}_x} \qquad (LP)$$

$$\leq 3\,\Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{2sk}|Q_k u_0|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^{q'}_x} \sim \|u_0\|_{H^{s,q'}_x} \qquad \square$$

Bem.:

(1) Die Ungleichung (*) für die gemischten L^p–L^q-Normen bedarf vielleicht der Erläuterung: Seien $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{C},\nu)$ Maßräume und $f: X\times Y \to [0,\infty)$ $\mathcal{A}\times\mathcal{C}$-meßbar, definiert man die gemischte L^p–L^q-Norm durch

$$\|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} := \Big(\int_X\Big(\int_Y f^q\,d\nu\Big)^{\frac{p}{q}}d\mu\Big)^{\frac1p}.$$

Dann gilt für $q\leq p$, dass $\|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} \leq \|f\|_{L^q_\nu(L^p_\mu)}$, denn

$$\|f\|^q_{L^p_\mu(L^q_\nu)} = \Big(\int_X\Big(\int_Y f^q\,d\nu\Big)^{\frac pq}d\mu\Big)^{\frac qp}$$

Minkowskische Integralungl.

$$= \Big\|\int_Y f^q\,d\nu\Big\|_{L^{\frac pq}(\mu)} \leq \int_Y \|f^q\|_{L^{\frac pq}_\mu}\,d\nu$$

$$= \int_Y \|f\|^q_{L^p_\mu}\,d\nu = \|f\|^q_{L^q_\nu(L^p_\mu)}$$

Da haben wir oben angewendet mit

q' für q und dem Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ für ν

sowie $p=2$ " dem Zählmaß auf $\mathbb{N}_0$ für μ.

(2) Die Formulierung der time-decay-Abschätzungen mit Hilfe der Sobolev-Normen $\| \ \|_{H^{s,q}}$ bzw. $\| \ \|_{\dot H^{s,q}}$, die ich in Satz 1 gewählt habe, ist die Standard-Version. Diese kann durch Verwendung von <u>Besov-Normen</u> verschärft werden, die durch

$$\| u_0 \|_{B^{\sigma}_{p,q}} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\sigma q} \, \| Q_k u_0 \|^q_{L^p_x} \right)^{\frac{1}{q}}$$

bzw.

$$\| u_0 \|_{\dot B^{\sigma}_{p,q}} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\sigma q} \, \| P_{\Delta k} u_0 \|^q_{L^p_x} \right)^{\frac{1}{q}}$$

gegeben sind (mit Q_k wie im Beweis von Satz 1). Durch die Verwendung der Littlewood-Paley-Zerlegung wird man tatsächlich in recht natürlicher Weise auf diese (vielleicht etwas gewöhnungsbedürftigen) Normen geführt. Ginibre und Velo bemerken dazu in einer viel zitierten Arbeit aus 1995, die den Stand der Dinge für die Wellengleichung zu diesem Zeitpunkt zusammenfasst: "We shall state the Strichartz-inequalities in the Besov version, which is both the stronger one and the easier one to prove."

Gemeint ist folgendes: Quadrieren wir die Ungleichungen in Corollar 1 und summieren über $k \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \| Q_k e^{itA} u_0 \|^2_{L^q_x} \leq C_n^2 \, |t|^{-2n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{2sk} \| Q_k u_0 \|^2_{L^{q'}_x}$$

Wenn wir jetzt die Wurzel ziehen:

$$\| e^{itA} u_0 \|_{B^0_{q,2}} \leq C_n |t|^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \| u_0 \|_{B^s_{q',2}} .$$

(Hier könnte man auch andere Feinindices wählen als 2, aber damit lässt sich nicht gut weiterverarbeiten.) Einfacher als der Beweis von Satz 1 ist das zweifellos, aber inwiefern auch stärker? – Oben im Bew. und der anschl. Bem. haben wir uns verklart, dass

$$\|f\|_{H^{\sigma,p}} \underset{L.P.}{\sim} \| (\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{2\sigma k} |Q_k f|^2)^{1/2} \|_{L^p_x} = \| (2^{\sigma k} |Q_k f|)_k \|_{L^p_x(\ell^2_k)}$$

$$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \quad \| (2^{\sigma k} |Q_k f|)_k \|_{\ell^2_k(L^p_x)} = \|f\|_{B^\sigma_{p,2}} ,$$

wobei $\geq$ für $p \leq 2$ und $\leq$ für $p \geq 2$ gilt. D.h.: Unter Verwendung des Satzes von Littlewood-Paley haben wir die Stetigkeit der Einbettungen

$$\boxed{H^{\sigma,p} \subset B^\sigma_{p,2} \quad \text{für} \quad 1 < p \leq 2} \quad \text{und} \quad \boxed{B^\sigma_{p,2} \subset H^\sigma_p \quad \text{für} \quad 2 \leq p < \infty}$$

gezeigt und damit die Ungleichungskette

$$\| e^{itA} u_0 \|_{L^q} \lesssim \| e^{itA} u_0 \|_{B^0_{q,2}} \leq C_n |t|^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \| u_0 \|_{B^s_{q',2}}$$

$$\lesssim_n |t|^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \| u_0 \|_{H^{s,q'}} \quad (2 \leq q < \infty,\ s = (n+2)(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{q})),$$

und damit ist klar, inwiefern die Besov-Version die stärkere Aussage ist.