2.3 Strichartz-Abschätzungen

2.3.1 Für die Klein-Gordon-Gleichung in $n \geq 1$ Raumdimensionen

Das in diesem Teilabschnitt folgende gilt nur im Fall $m \neq 0$!

Wir nehmen wieder o.E. $m=1$ an und setzen $A := \sqrt{I-\Delta}$.

<u>Def.</u>: Ein Paar (p,q) von Hölder-Exponenten heißt Schrödinger-zulässig (admissable), wenn

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{2}{p} = \frac{n}{2}-\frac{n}{q} \quad \text{gelten.}$$

<u>Satz 1</u>: Es sei (p,q) ein Schrödinger-zulässiges Paar mit $q<\infty$ und $s := s(n,q) := (\frac{n}{2}+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})$.

(1) Für $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $u_\pm(t) = e^{\pm itA}u_0$ sind

$$u_\pm \in L^p_t(\mathbb{R}, L^q_x(\mathbb{R}^n)) \cap C_b(\mathbb{R}, H^s_x(\mathbb{R}^n))$$

und es gelten die Abschätzungen

$$\| u_\pm \|_{L^p_t(\mathbb{R}, L^q_x)} \lesssim \| u_0 \|_{H^s_x}.$$

(2) Für $f \in L^{p'}_t(\mathbb{R}, H^{s,q'}_x(\mathbb{R}^n))$ ist $g_\mp := \int_{\mathbb{R}} e^{\mp itA} f(t)\,dt \in L^2_x(\mathbb{R}^n)$

und es gelten

$$\| g_\mp \|_{L^2_x} \lesssim \| f \|_{L^{p'}_t(\mathbb{R}, H^{s,q'}_x)}.$$

(3) Für $f \in L^{p'}_t(\mathbb{R}, H^{s,q'}_x(\mathbb{R}^n))$ sei $F_\pm(t) = \int_0^t e^{\pm i(t-s)A} f(s)\,ds$.
Dann sind $F_\pm \in L^p_t(\mathbb{R}, H^{-s,q}_x(\mathbb{R}^n))$ und es gilt

$$\| F_\pm \|_{L^p_t(\mathbb{R}, H^{-s,q}_x)} \lesssim \| f \|_{L^{p'}_t(\mathbb{R}, H^{s,q'}_x)}.$$

Zusatz: (1) Die impliziten Konstanten hängen nur von p, q und der Raumdimension n ab.

(2) In Teil (2) kann das Integrationsintervall $\mathbb{R}$ durch ein beliebiges Teilintervall $I \subset \mathbb{R}$ ersetzt werden. Dazu wende man (2) mit $f \cdot \chi_I$ anstelle von f an.

(3) In Teil (3) kann das Integrationsintervall $[0,t]$ durch ein beliebiges ersetzt werden, z.B. $[t,\infty)$ oder auch $(-\infty, t]$. Das wird der Beweis zeigen.

Bem.: (1) Nach Vorarbeiten von Stein und Tomas (1975) und Segal (1976) zeigte Robert S. Strichartz ähnliche Abschätzungen für $p=q$ für die Wellen- und die Schrödinger-Gleichung (1977). Deren Verallgemeinerung auf den nicht-diagonalen Fall $p \neq q$ erfolgte 1979 durch Ginibre-Velo.

(2) Die Voraussetzungen an die Paare (p,q) in Satz 1 sind (fast) dieselben wie im zuerst bewiesenen Fall der Schrödinger-Gleichung. Daher die vielleicht etwas irritierende Bez. "Schrödinger-admissable".

(3) Frühe Beiträge (1984/85) zur KGG sind die to P. Brenner, H. Pecher, Ginibre-Velo. Hier folgen wir Nakanishi-Schlag (2011).

Kenig-Ponce-Vega, 1991

(4) Die Abschätzungen gelten auch für $n=1$ und $q=\infty$,

(5) werden hingegen (sicherlich) falsch für $n=2, q=\infty$. Das entsprechende Argument für die Schrödinger-Gleichung (Montgomery-Smith, 1998) erlaubt keine direkte Übertragung.

(6) Für $n \geq 3$ sind die "endpoint-cases" $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ ebenfalls gezeigt worden: Keel-Tao, 1998. Seither nennt man (p,q) mit $\frac{2}{p} = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}$ und $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ für $n \geq 3$ ebenfalls "Schrödinger-admissable".

Folgerungen: Es seien n, p, q und s wie in Satz 1.

(1) Für $u_0 \in H^s_x(\mathbb{R}^n)$ und $u_1 \in H^{s-1}_x(\mathbb{R}^n)$ gelten

$$\|\cos(tA)u_0\|_{L^p_t(\mathbb{R},L^q_x)} \lesssim \|u_0\|_{H^s}, \quad \|A^{-1}\sin(tA)u_1\|_{L^p_t(\mathbb{R},L^q_x)} \lesssim \|u_1\|_{H^{s-1}}$$

Insbesondere haben wir für die Lösung

$$u(t) = \cos(tA)u_0 + A^{-1}\sin(tA)u_1$$

von $(\Box + I)u = 0$, $u(0) = u_0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$ die Abschätzung

$$\|u\|_{L^p_t(\mathbb{R},L^q_x)} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}}.$$

(2) Die Lösung F der inhomogenen linearen KGG

$$(\Box + I)F = f \qquad \text{mit} \quad F(0) = \frac{\partial F}{\partial t}(0) = 0$$

ist gegeben durch $F(t) = A^{-1}\int_0^t \sin((t-s)A)f(s)\,ds$.

Hierfür gilt $\|F\|_{L^p_t(\mathbb{R},H^{1-s,q}_x)} \lesssim \|f\|_{L^{p'}_t(\mathbb{R},H^{s,q'}_x)}$.

(3) Sei $H_0 = -i\alpha\cdot\nabla + \beta$ der freie Dirac-Operator (mit $m=1$) und $\psi(t) = e^{-itH_0}\psi_0$ die Lösung von

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_0\psi \qquad \text{mit} \quad \psi(0) = \psi_0 \in H^s_x(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt (mit N-komponentigen Normen!)

$$\|\psi\|_{L^p_t(\mathbb{R},H^{0,q}_x)} \lesssim \|\psi_0\|_{H^s}$$

sowie

$$\left\|\int_0^t e^{-i(t-s)H_0}f(s)\,ds\right\|_{L^p_t(H^{-s,q}_x)} \lesssim \|f\|_{L^{p'}_t(\mathbb{R},H^{s,q'}_x)}.$$

Neben dem time-decay-estimate benötigen wir für den Beweis:

1. Die Hardy-Littlewood-Sobolev (HLS) - Ungleichung für die Zeitvariable, also in einer Raumdimension, das ist

$$\| \, |t|^{-\lambda} * g \, \|_{L^s_t} \lesssim \|g\|_{L^\sigma_t} \quad ,$$

sofern $0 < \lambda < 1$ und $\frac{1}{s'} = 1 - \lambda + \frac{1}{\sigma'}$.

(vgl. Vorlesung "Harmonische Analysis" (SoSe 17), Abschnitt 2.4., oder Grafakos, Band I, Thm. 1.4.24)

2. Den Satz über die Dualräume gemischter L^p-L^q-Räume: Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $1 \leq p, q < \infty$. Dann ist

$$\phi : L^{p'}_\mu (L^{q'}_\nu) \longrightarrow (L^p_\mu (L^q_\nu))' \quad ,$$

def. durch $\quad \phi(g)[f] := \int\limits_{X \times Y} f(x,y) g(x,y) \, d\mu(x) d\nu(y)$

ein isometrischer Isomorphismus.

Hierbei ist, wie bereits angegeben

$$\|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} = \left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^q d\nu(y) \right)^{\frac{p}{q}} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ist u.a. nützlich für Normabschätzungen, z.B. wenn $1 \leq p, q < \infty$

$$\|g\|_{L^{p'}_\mu(L^{q'}_\nu)} = \|\phi(g)\|_{(L^p_\mu(L^q_\nu))'} \underset{\text{Def. der Norm auf dem Dualraum}}{=} \sup_{\substack{f \in L^p_\mu(L^q_\nu) \\ \|f\|_{p,q} \leq 1}} |\phi(g)[f]|$$

$$= \sup_{\|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} \le 1} \left| \int_{X \times Y} f(x,y)\, g(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \right| .$$

Insbesondere ist jedes stetige lineare Funktional auf solchen gemischten L^p-L^q-Räumen mit Hilfe des $L^2(\mu \times \nu)$-Skalarprodukts darstellbar.

3. Das TT^*-Argument. Es seien E und F Banachräume und $T: E \to F$ linear. Die stetigen linearen Funktionale auf E bzw. F seien darstellbar mit Hilfe von Skalarprodukten $\langle\, ,\, \rangle_E$ bzw. $\langle\, ,\, \rangle_F$. Dann heißt die ebenfalls lineare Abbildung

$$T^* : F' \to E', \text{ def. durch } \underbrace{\langle T^* y, x\rangle_E := \langle y, Tx\rangle_F}_{\forall x \in E,\, y \in F'}$$

die adjungierte (oder duale) Abbildung zu T. Aus der FA ist bekannt, dass

$$\|T^*\| = \sup_{\substack{y \in F' \\ \|y\| \le 1}} \|T^* y\| = \sup_{\substack{y \in F' \\ \|y\| \le 1}} \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \le 1}} \langle T^* y, x\rangle$$

Normformel, Folgerung aus dem Satz v. Hahn-Banach.

$$= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \le 1}} \sup_{\substack{y \in F' \\ \|y\| \le 1}} \langle y, Tx\rangle = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \le 1}} \|Tx\| = \|T\| .$$

Das heißt: T^* ist genau dann stetig, wenn T stetig ist, und die Operatornormen stimmen überein. Jetzt spezialisieren wir auf den Fall, dass E ein Hilbertraum ist, den wir H nennen, und dessen Skp. schlicht mit $\langle\, ,\, \rangle$ bezeichnet sei. Für F schreiben wir B. Dann gilt:

Lemma 1 (TT^*): Es seien H ein Hilbertraum, B ein Banachraum und $T: H \to B$ linear. Dann sind äquivalent

(1) $T: H \to B$ ist stetig.

(2) $T^*: B' \to H$ ist stetig

(3) $TT^*: B' \to B$ ist stetig.

In diesem Fall gilt für die Operatornormen, dass

$$\|T\| = \|T^*\| = \|TT^*\|^{\frac{1}{2}}.$$

Bew.: (1) $\Leftrightarrow$ (2) und $\|T\| = \|T^*\|$ gilt nach der Vorbemerkung. Da die Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig ist, folgt (3) aus (1) und/oder (2). Die Submultiplikativität der Operatornorm impliziert $\|TT^*\| \le \|T\| \|T^*\| = \|T\|^2$. Nun gelte (3). Dann ist für $y \in B'$:

$$\| T^* y \|^2 = \langle T^* y, T^* y \rangle = \langle TT^* y, y \rangle_B \le \|TT^*\| \|y\|^2$$

und also $\|T^*\|^2 = \sup_{\substack{y \in B' \\ \|y\| \le 1}} \|T^* y\|^2 \le \|TT^*\|$. $\square$

Bem.: Der "Clou" beim TT^*-Argument ist der: Wenn in der Verkettung

$$B' \xrightarrow{T^*} H \xrightarrow{T} B$$

ein Hilbertraum in der Mitte steht (was diese Verknüpfung erst ermöglicht!), so kann man aus der Stetigkeit der Komposition TT^* auf die Stetigkeit von T und T^* schließen!

Bew. von Satz 1 (für den +-Fall, für − entsprechend):

(1) Wir wenden das TT^*-Lemma an auf die lin. Abb.

$$T : L^2_x(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p_t(\mathbb{R}, L^q_x(\mathbb{R}^n)), \quad u_0 \longmapsto J^{-s}u,$$

wobei $u(t) = e^{itA}u_0$. Dann ist die Stetigkeit von T gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\| J^{-s}u \|_{L^p_t(\mathbb{R}, L^q_x(\mathbb{R}^n))} \lesssim \| u_0 \|_{L^2_x},$$

und das ist die Abschätzung in (1), da

$$J^s := \mathcal{F}_x^{-1} \langle \xi \rangle^s \mathcal{F}_x : H^{s,q}_x \longrightarrow L^q_x$$

per def. ein isometrischer Isomorphismus ist.

Bestimmung von T^*, def. durch $\langle T^*f, u_0 \rangle_{L^2_x} \overset{!}{=} \langle f, Tu_0 \rangle_{L^2_{xt}}$:

$$\langle f, T^* u_0 \rangle_{L^2_{xt}} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t,x) \overline{J^{-s} e^{itA} u_0(x)}\, dx\, dt$$

$$\overset{\text{Plancherel}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x f(t,\xi) \overline{\langle \xi \rangle^{-s} e^{it\langle \xi \rangle} \hat{u}_0(\xi)}\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{-s} e^{-it\langle \xi \rangle} \mathcal{F}_x f(t,\xi)\, \overline{\hat{u}_0(\xi)}\, d\xi\, dt$$

$$\overset{\text{Planch.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} J^{-s} e^{-itA} f(t,x)\, \bar{u}_0(x)\, dx\, dt$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} J^{-s} e^{-itA} f(t,x)\, dt\ \ \bar{u}_0(x)\, dx$$

$$= \langle T^* f, u_0 \rangle_{L^2_x} \quad \text{für } T^* f(x) = \int_{\mathbb{R}} J^{-s} e^{-itA} f(t,x)\, dt,$$

in den Bez. des Satzes also $T^*f = J^{-s}g_-$, und die in (2) behauptete Ungleichung ist gerade die Stetigkeit von

$$T^* : L_t^{p'}(\mathbb{R}, L_x^{q'}) \longrightarrow L_x^2(\mathbb{R}^4).$$

Also sind (1) und (2) äquivalent und beide folgen aus

$$\| TT^*f \|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \|f\|_{L_t^{p'}(\mathbb{R}, L_x^{q'})},$$

ausgeschrieben:

$$\| J^{-2s} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')A} f(t')dt' \|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \|f\|_{L_t^{p'}(L_x^{q'})}. \qquad (!)$$

(2) Wir zeigen für ein beliebiges Intervall I_t (Integralgrenzen dürfen von t abhängen):

$$\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')dt' \|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \|f\|_{L_t^{p'}(H_x^{2s,q'})},$$

dann folgen (!) für $I_t = \mathbb{R}$ und (3) für $I_t = [0,t]$.

(i) Der Fall $q=2, p=\infty$. Hier haben wir $s=0$ und

$$\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')dt' \|_{L_t^\infty(L_x^2)} \leq \int_{\mathbb{R}} \|e^{i(t-t')A} f(t')\|_{L_x^2} dt'$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \|f(t')\|_{L_x^2} dt' = \|f\|_{L_t^1(L_x^2)}$$

(ii) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} < \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ und $\frac{2}{p} = \frac{4}{2} - \frac{4}{q}$. Minkowski's Ungl. ergibt

$$\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')dt' \|_{L_x^q} \leq \int_{\mathbb{R}} \|e^{i(t-t')A} f(t')\|_{L_x^q} dt'$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}} |t-t'|^{-\lambda} \, \|f(t')\|_{H_x^{2s,q'}} \, dt' = |t|^{-\lambda} * \|f(\cdot)\|_{H^{2s,q'}}(t)$$

aufgrund des time-decay estimate, wobei hier

$$\lambda = n\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{q}\right) \quad \left(\in (0,1) \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n} < \tfrac{1}{q} < \tfrac{1}{2}\right)$$

Hierauf wenden wir HLS an und erhalten

$$\Big\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')\,dt' \Big\|_{L_t^p(L_x^q)}$$

$$\lesssim \Big\| \, |t|^{-\lambda} * \|f(\cdot)\|_{H^{2s,q'}} \Big\|_{L_t^p} \overset{\substack{HLS \\ \downarrow}}{\lesssim} \|f\|_{L_t^{p'}(H_x^{2s,q'})},$$

wobei HLS erfordert, dass $\frac{1}{p'} = 1-\lambda+\frac{1}{p} \Leftrightarrow \lambda = 1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p'} = \frac{2}{p}$,

also $\frac{2}{p} = \frac{n}{2}-\frac{n}{q}$ wie vorausgesetzt. $\square$