## 2.3.2 Für die Wellengleichung in $n \geq 2$ Raumdimensionen (10)

(Die Abschätzungen in diesem Abschnitt gelten entsprechend auch für die Klein-Gordon-Gleichung.)

Lassen Sie uns noch einmal den Beweis der Strichartz-Abschätzungen für die Klein-Gordon-Gleichung in etwas anderer Reihenfolge durchgehen und dabei für die Wellengleichung modifizieren: Eine bestimmende Bedeutung hat dabei stets der <u>time decay</u>, den wir in Abschnitt 2.2 gezeigt haben.

Stets sei $2 \leq q < \infty$. Dann haben wir für die

| <u>Klein-Gordon-Gleichung</u> | <u>Wellengleichung</u> |
|---|---|
| $n \geq 1, \ \sigma = (n+2)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ | $n \geq 2 \quad \sigma = (n+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ |
| Dann gilt mit $A = (I - \Delta)^{\frac{1}{2}}$ und für $t \neq 0$: | ... für $t \neq 0$: |
| $\Vert e^{itA} u_0 \Vert_{L^q_x} \lesssim_n \vert t\vert^{-n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \Vert u_0 \Vert_{H_x^{\sigma, q'}}$ | $\Vert e^{it(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} u_0 \Vert_{L^q_x} \lesssim_n \vert t\vert^{-(n-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \Vert u_0 \Vert_{\dot{H}_x^{\sigma, q'}}$ |

Grundlegend sind diese time-decay-Abschätzungen insofern, als durch sie die spezifischen Eigenschaften der Gleichung bzw. der Phasenfunktion eingehen. Dieses bestimmen:

- den Exponenten bei $|t|$, also die Stärke des zeitlichen Abfalls für große Zeiten. (Hier kann für die KG-Gleichung eine stärkere Aussage erreicht werden als für die Wellengleichung, insbesondere ist für den Fall $n=1$ überhaupt nur für $m \neq 0$ ein time decay nachweisbar.)

- die Höhe des (Gewinnes bzw. hier des) Verlusts an Ableitungen, der mit dem Sobolevexponenten $\sigma$ quantifiziert ist.

Mit Hilfe des time decay estimate schätzt man die $L^q_x$-Norm von $TT^*f(t)$ ab, etwas allgemeiner:

$$\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')\,dt' \|_{L^q_x} \lesssim \int_{\mathbb{R}} |t-t'|^{-\lambda} \, \| f(t') \|_{\sigma, q'} \, dt',$$

wobei im Fall der

| <u>Klein-Gordon-G.</u> | <u>Wellen-G.</u> |
|---|---|
| $A = (I-\Delta)^{1/2}$ | $A = (-\Delta)^{1/2}$ |
| $\lambda = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$ | $\lambda = (n-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$ |
| $\| \quad \|_{\sigma,q'} = \| \quad \|_{H^{\sigma,q'}}$ | $\| \quad \|_{\sigma,q'} = \| \quad \|_{\dot{H}^{\sigma,q'}}$ |
| (inhomogene Sobolev-Norm) | (homogene Sobolevnorm) (q und $\sigma$ wie oben!) |

Hierauf wird die Hardy-Littlewood-Sobolev- (HLS-) Ungleichung in der Zeitvariablen (also in einer Dimension) angewendet, das ist

$$\| \, |t|^{-\lambda} * g \, \|_{L^p_t} \lesssim \|g\|_{L^{p'}_t} ,$$

wobei wegen des nachfolgenden $TT^*$-Arguments konjugierte Hölder-Exponenten erforderlich sind. HLS erfordert nun $0 < \lambda < 1$ und $\frac{1}{p'} = 1 - \lambda + \frac{1}{p}$, also

$$\boxed{0 < \lambda < 1 \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{2}{p}} \; (*)$$

Durch diese Voraussetzung der HLS-Ungleichung (und die vorherige Bestimmung von $\lambda$) wird festgelegt, was ein "admissible pair" ist: Für die

<u>Klein-Gordon- und Schrödinger</u> Gleichung

$0 < \lambda < 1$ und $\lambda = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$$

($q = 2$ ≙ Erhaltung von $\| \; \|_{L^2}$, ist also ebenfalls zulässig!)

Die zweite Bedingung lautet

$$\frac{n}{2} - \frac{n}{q} = \lambda = \frac{2}{p}$$

time decay HLS

<u>Wellen-Gleichung</u>

ersetze $n$ durch $n-1$ ($n \geq 2$ ist vorausgesetzt!)

ersetze wieder $n$ durch $n-1$.

---

(*) Die allgemeine Form von HLS auf dem $\mathbb{R}^n$ lautet:
$\| \, |x|^{-\lambda} * g \, \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$ für $0 < \lambda < n$ und $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{r'}$.

Def. Ein Paar $(p,q)$ von Hölder-Exponenten mit $q<\infty$ heißt "wave admissable" in $n\geq 2$ Raumdimensionen, wenn gilt $\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}<\frac{1}{q}\leq\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{p}+\frac{n-1}{q}=\frac{n-1}{2}$.

Unter dieser Voraussetzung erhält man dann – mit $s=\frac{5}{2}$ – die Abschätzungen:

$$\Big\|\int_{I_t} e^{i(t-t')(I-\Delta)^{1/2}} f(t')\,dt'\Big\|_{L_t^p(H_x^{-s,q})} \lesssim \|f\|_{L_t^{p'}(H_x^{s,q'})}$$

für Schrödinger-admissable pairs $(p,q)$ und $s=(\frac{n}{2}+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})$, für $n\geq 1$ im Fall der Klein-Gordon-Gleichung.

$$\Big\|\int_{I_t} e^{i(t-t')(-\Delta)^{1/2}} f(t')\,dt'\Big\|_{L_t^p(\dot H_x^{s,q})} \lesssim \|f\|_{L_t^{p'}(\dot H_x^{s,q'})} \qquad (*)$$

für wave admissable pairs $(p,q)$ und $s=\frac{n+1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})$ im Fall der Wellengleichung (nur für $n\geq 2$!).

Damit sind die Ableitungsordnungen und die Hölder-Exponenten festgelegt, das nachfolgende $TT^*$-Argument ist unabhängig von der Gleichung. Zusammenfassend erhalten wir die folgenden <u>Strichartz-Abschätzungen für die Wellengleichung</u>:

<u>Satz 2</u>: Es seien $(p,q)$ ein "wave-admissable" pair mit $q<\infty$ und $s=\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)$.

(1) Für $u_0\in \dot H^s(\mathbb{R}^n)$ und $u_\pm(t)=e^{\pm it(-\Delta)^{1/2}}u_0$ sind

$$u_\pm \in L^p_t(\mathbb{R},L^q_x)\cap C_b(\mathbb{R},\dot H^s(\mathbb{R}^n))$$

und es gelten die Abschätzungen

$$\|u_\pm\|_{L^p_t(\mathbb{R},L^q_x)} \lesssim \|u_0\|_{\dot H^s}$$

(2) Für $f\in L^{p'}_t(\mathbb{R},\dot H^{s,q'}_x)$ ist $g_\mp := \int_{\mathbb{R}} e^{\mp it(-\Delta)^{1/2}}f(t)\,dt \in L^2_x(\mathbb{R}^n)$

und $\|g_\mp\|_{L^2_x} \lesssim \|f\|_{L^{p'}_t(\mathbb{R},\dot H^{s,q'}_x)}$.

(3) Für $f\in L^{p'}_t(\mathbb{R},\dot H^{s,q'}_x)$ sei $F_\pm(t)=\int_0^t e^{\pm i(t-t')(-\Delta)^{1/2}}f(t')\,dt'$,

dann sind $F_\pm\in L^p_t(\mathbb{R},\dot H^{-s,q}_x(\mathbb{R}^n))$ und es gilt

$$\|F_\pm\|_{L^p_t(\mathbb{R},\dot H^{-s,q}_x)} \lesssim \|f\|_{L^{p'}_t(\mathbb{R},\dot H^{s,q'}_x)}.$$

<u>Bem.</u>: Die Folgerungen aus Satz 1 für die Lösungen der Klein-Gordon- und "massiven" Dirac-Gleichung gelten entsprechend für die Wellen- und "masselose" Dirac-Gleichung, wenn man dort $s,p,q$ in Abhängigkeit von $n\geq 2$ wie in Satz 2 voraussetzt, $A$ durch $(-\Delta)^{1/2}$ und $H^{s,r}$ durch die homogene Version $\dot H^{s,r}$ ersetzt.

Ich möchte noch auf eine Möglichkeit der Verallgemeinerung der Abschätzungen für die Lösungen der inhomogenen Glen. aufmerksam machen. Man benötigt dazu ein weiteres Interpolationsargument, genauer gesagt: die folgende

Verallgemeinerung des Satzes von Riesz-Thorin: Es seien

- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ $\sigma$-endliche Maßräume;
- $p_0, p_1, p; \tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p} \in [1,\infty]$ und $q_0, q_1, q; \tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q} \in (1,\infty)$;
- $s_0, s_1, s \in \mathbb{R}$;
- $T_i : L^{p_i}_{\mu}(H^{s_i,q_i}) \longrightarrow L^{\tilde{p}_i}_{\nu}(L^{\tilde{q}_i}_x) \qquad (i \in \{0,1\})$

  stetige lineare Abbildungen mit Operatornormen $M_i$, die auf einem gemeinsamen dichten Teilraum $\Delta$ übereinstimmen, also $T_0|_\Delta = T_1|_\Delta =: T_\Delta$.

Für ein $\theta \in [0,1]$ gelte

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1-\theta}{\tilde{p}_0} + \frac{\theta}{\tilde{p}_1}; \text{ desgl. für } q, \tilde{q}; \quad s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1.$$

Dann besitzt $T_\Delta$ eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $T : L^p_\mu(H^{s,q}_x) \longrightarrow L^{\tilde{p}}_\mu(L^{\tilde{q}}_x)$,

und für die Operatornorm gilt $\|T\| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

Hierin können die inhomogenen Sobolevräume $H^{s,q}$ durch die homogenen $\dot{H}^{s,q}$ ersetzt werden.

(Vgl. Bergh-Löfström; Triebel: Interpolation theory, ...)

Jetzt gehen wir zurück zu (*) auf S. 105 und schätzen die linke Seite etwas anders ab (hier beispielhaft für $A=(I-\Delta)^{\frac{1}{2}}$):

$$\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')\,dt' \|_{L^p_t(H^{-s,q}_x)}$$

$$\leq \| \int_{I_t} \| e^{i(t-t')A} f(t') \|_{H^{-s,q}_x} dt' \|_{L^p_t}$$

Jetzt ist der Integrand nichtnegativ, so dass die Vergrößerung des Integrationsintervalls den Ausdruck ebenfalls vergrößert. D.h. wir können $I_t$ durch $\mathbb{R}$ ersetzen und anschließend erneut die Dreiecksungleichung anwenden:

$$\ldots \leq \int_{\mathbb{R}} \| e^{itA} e^{-it'A} f(t') \|_{L^p_t(H^{-s,q}_x)} dt'$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}} \| e^{-it'A} f(t') \|_{\cancel{L^p_t(H^{-s,q}_x)}\, L^2_x} dt' = \| f \|_{L^1_t(L^2_x)}$$

Abschätzung für die homogene lin. Gleichg

$(e^{itA})_{t\in\mathbb{R}}$ ist auf $L^2_x$ unitär

D.h. wir haben die Ungleichungen

$$\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')\,dt' \|_{L^p_t(H^{-s,q}_x)} \lesssim \begin{cases} \| f \|_{L^{p'}_t(H^{s,q'}_x)} \\ \| f \|_{L^1_t(L^2_x)} \end{cases},$$

die wir als Stetigkeit der linearen Abbildungen

$$T_i : L^{p_i'}_t(H^{s_i,q_i'}_x) \longrightarrow L^p_t(H^{-s,q}_x),\quad f \longmapsto \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')\,dt'$$

mit $p_0=p$, $p_1=\infty$, $q_0=q$, $q_1=2$, $s_0=s$ und $s_1=0$ auffassen können. Zu $\theta\in(0,1)$ legen wir $\tilde p, \tilde q$ und $\sigma$ fest durch

$$\frac{1}{\tilde p}=\frac{1-\theta}{p}\left(+\frac{\theta}{\infty}\right); \quad \frac{1}{\tilde q}=\frac{1-\theta}{q}+\frac{\theta}{2} \quad ; \sigma=(1-\theta)s\ (+\theta\cdot 0).$$

Dann ergibt der Interpolationssatz

$$\Big\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')\,dt' \Big\|_{L_t^p(H_x^{-s,q})} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde p'}(H_x^{\sigma,\tilde q'})}. \quad (*)$$

Sowohl die Interpolationsbedingungen als auch die Voraussetzungen an "admissible pairs" sind die Sobolev-Regularität sind linear in $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ und $s$. Daher erhalten wir durch Interpolation zwischen zulässigen Paaren wieder ein zulässiges Paar $(\tilde p, \tilde q)$, und ferner gilt $\sigma=(\frac{n}{2}+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tilde q})$. Andererseits können wir auch zu jedem "admissable pair" $(\tilde p,\tilde q)$ mit $p\le\tilde p\le\infty$ stets ein $\theta\in[0,1]$ finden, so dass $(*)$ gilt.

Um $(*)$ auch für diejenigen "admissable pairs" $(\tilde p,\tilde q)$ mit $2\le\tilde p\le p\le\infty$ zu zeigen, müssen wir ein wenig anders vorgehen. Dazu sei $(\tilde p,\tilde q)$ ein beliebiges zulässiges Paar. Dafür gilt dann einerseits die Abschätzung

$$\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')dt' \|_{L_t^{\tilde{p}}(H_x^{-\sigma,\tilde{q}})} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{p}'}(H_x^{\sigma,\tilde{q}'})} \quad (**,1)$$

zur Verfügung, sofern $\sigma = (\frac{u}{2}+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tilde{q}})$ ist. Nun gilt aber auch

$$\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')dt' \|_{L_t^\infty(L_x^2)}$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \| e^{itA} \int_{I_t} e^{-it'A} f(t')dt' \|_{L_x^2}$$

$$= \sup_{I\subset\mathbb{R}} \| \int_I e^{-it'A} f(t')dt' \|_{L_x^2} .$$

Hierbei haben wir wieder verwendet, dass $e^{itA}: L_x^2 \to L_x^2$ für jedes $t\in\mathbb{R}$ eine Isometrie ist. Nun benutzen wir die Stetigkeit von $T^*$ (also die Abschätzung (2) im Satz 1), um fortzufahren mit

$$\ldots \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{p}'}(H_x^{\sigma,\tilde{q}'})}, \quad \text{also insgesamt}$$

$$\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')dt' \|_{L_t^\infty(L_x^2)} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{p}'}(H_x^{\sigma,\tilde{q}'})} \quad (**,2).$$

Jetzt steht auf den rechten Seiten von $(**,i)$ $(i\in\{1,2\})$ dasselbe, und durch Anwendung des Interpolationssatzes können wir $(*)$, das ist

$$\| \int_{I_t} e^{i(t-t')A} f(t')dt' \|_{L_t^p(H_x^{s,q})} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{p}'}(H_x^{\sigma,\tilde{q}'})}$$

erhalten, wenn immer $(p,q)$ ein "admissable pair" mit $\tilde{p} \le p \le \infty$ und $s = (\frac{n}{2}+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})$ ist. 

Damit gezeigt ist die folgende

<u>Ergänzung zu den Sätzen 1 und 2:</u> Es seien $(p,q)$ bzw. $(\tilde{p},\tilde{q})$ zulässige Paare, $s = C(n)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})$, $\sigma = C(n)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tilde{q}})$ mit $C(n) = \frac{n}{2}+1$ im Fall der KG- und $C(n) = \frac{n+1}{2}$ im Fall der Wellengleichung. Dann gelten in den Teilen (3) der beiden Sätze auch die Abschätzungen

$$\| F_\pm \|_{L_t^p(\mathbb{R}, H_x^{-s,q})} \lesssim \| f \|_{L_t^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}, H_x^{\sigma,\tilde{q}'})},$$

wobei für die Wellengleichung $H$ durch $\dot{H}$ zu ersetzen ist.

In den Anwendungen auf semi-lineare Wellengleichungen mit quadratischen Nichtlinearitäten sind oft die Terme

$$\|u\cdot v\|_{L^2_{xt}} \quad ; \quad \|D(uv)\|_{L^2_{xt}} \quad ; \quad \|(Du)(Dv)\|_{L^2_{xt}}$$

abzuschätzen durch die jeweiligen Normen mit denen man bei der Durchführung eines Fixpunktarguments gestartet ist. Hierbei steht $D$ für eine der Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \le j \le n$, oder Linearkombinationen davon.

Die $L^2_x$-Norm ist an dieser Stelle plausibel, weil unsere Datenräume $H^s$ bzw. $\dot{H}^s$ $L^2$-basiert sind. Die $L^2$-Norm in $t$ bietet den weiteren Vorteil, dass der Satz von Plancherel in allen $n+1$ Variablen zur Verfügung steht. Damit sind punktweise Abschätzungen im Fourierraum verlustfrei möglich. (Wie wir nach $L^2_t$ kommen, werden wir in einem späteren Kapitel sehen.)

Wenn wir die obigen Ausdrücke für freie Lösungen

$$u(t) = e^{\pm it(-\Delta)^{1/2}}u_0 \quad \text{und} \quad v(t) = e^{\pm it(-\Delta)^{1/2}}v_0$$

abschätzen wollen, so können wir Hölder- und Sobolevungleichungen verbinden mit einer Anwendung der linearen Strichartz-Abschätzungen. Sobolev- und Strichartz-Ungleichungen sind bei der Wellengleichung unweigerlich mit einem Ableitungsverlust verbunden, den wir nach Möglichkeit auf einen Faktor mit niedriger Frequenz abwälzen sollten. Mit "low-frequency-factor" ist gemeint: Wenn $u_0 = P_{\Delta k} u_0$ und $v_0 = P_{\Delta \ell} v_0$ und $k \gg \ell$, so ist $v_0$ bzw. $v$ der "l.f.f.", und auf den sollten wir die Ableitungen schieben.

Lemma 1: Es seien $n \geq 3$, $u$ und $v$ wie oben, $s = \frac{n-1}{2}$ und $0 < \varepsilon < s$. Dann gilt

$$\|u \cdot v\|_{L^2_{xt}} \lesssim \|u_0\|_{\dot H^{\varepsilon}} \|v_0\|_{\dot H^{s-\varepsilon}} . \qquad (1)$$

Für $n \geq 4$ kann man $\lesssim \|u_0\|_{L^2_x} \|v_0\|_{H^{s+\varepsilon}}$ erreichen.

(Beachte: im ersten Fall: Homogene, im zweiten Fall: inhomogene Sobolev-Normen!)

Bew. der Aussage für $n \geq 4$. Wir benötigen neben den Strichartz-Abschätzungen die Sobolev-Einbettung

$$H^{\sigma,q} \subset C_0 \; (\subset L^\infty) \quad \text{für } \sigma > \frac{n}{q} . \qquad \text{(Sob.1)}$$

Wir beginnen mit der Hölderschen Ungleichung

$$\|uv\|_{L^2_{xt}} \leq \|u\|_{L^\infty_t(L^2_x)} \|v\|_{L^2_t(L^\infty_x)} ,$$

wobei $\|u\|_{L^\infty_t(L^2_x)} = \|u_0\|_{L^2_x}$.

Der Hölder-Exponent $p=2$ in $L_t^p(L_x^\infty)$ beim zweiten Faktor (114)
entspricht gerade der Endpunkt-Strichartz-Abschätzung.
Nach Keel-Tao lauten die Bedingungen für $n\geq 4$ nämlich

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}\leq\frac{1}{q}\leq\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{2}{p}=\frac{n-1}{2}-\frac{n-1}{q},$$

für $p=2$ also $\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}$, der Ableitungsverlust beträgt $\delta=\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)$. Dann schätzen wir also ab:

$$\|v\|_{L_t^2(L_x^\infty)} \underset{\text{Sob.}1}{\lesssim} \|v\|_{L_t^2(H_x^{\sigma,q})} \underset{\text{Str.}}{\lesssim} \|v_0\|_{H_x^{\delta+\sigma}}$$

und

$$\sigma+\delta=\frac{n}{q}+\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)^{+\varepsilon}=\frac{n+1}{4}+\frac{1}{2q}\cdot(2n-(n+1))+\varepsilon$$

$$=\frac{n+1}{4}+\frac{n-1}{2q}+\varepsilon=\frac{n+1}{4}+\frac{n-3}{4}+\varepsilon=\frac{n-1}{2}+\varepsilon,$$

$\square$

wie behauptet.

Um die Aussage auf den homogenen Sobolev-Normen einzusehen, benutzt man den Einbettungssatz

$$\dot{H}^{\sigma,q}\subset L^r \quad \text{für} \quad \sigma-\frac{n}{q}=-\frac{n}{r} \quad \text{und} \quad 0\leq\sigma<\frac{n}{q} \quad (\text{Sob.}2)$$

(Für den Beweis beider Einbettungssätze sei auf die Vorlesung "Dispersive" oder den 1. Band von Grafakos verwiesen.) Dann schätzt man ungefähr folgendermaßen ab:

$$\|uv\|_{L_{xt}^2}\lesssim\|u\|_{L_t^{\infty-}(L_x^{2+})}\|v\|_{L_t^{2+}(L_x^{\infty-})},$$

wobei $\pm$ geeignete $\varepsilon$'s andeuten, die zu den Kehrwerten der Hölderexponenten hinzuaddiert bzw. subtrahiert werden.

Eine Strichartz-Abschätzung nachher und Erhaltung der $L^2_x$-Norm ergibt dann $\|u\|_{L^{\infty-}_t(L^{2+}_x)} \lesssim \|u_0\|_{\dot H^\varepsilon}$. Für den (115)
zweiten Faktor verfährt man wie oben, allerdings mit (Sob. 2) statt (Sob. 1). Das Ergebnis ist dann

$$\|v\|_{L^{2+}_t(L^{\infty-}_x)} \lesssim \|v_0\|_{\dot H^{\frac{n-1}{2}-\varepsilon}} ,$$

tatsächlich mit genau demselben $\varepsilon$ wie bei $u_0$. Dies zu überprüfen ist etwas mühsam, sei aber dennoch zur Übung empfohlen.

<u>Bem.</u>: (1) Die Ableitungsordnung $s = \frac{n-1}{2}$ in (1) ist notwendig "by scaling".

(2) Ist $u$ eine Lösung von $\Box u = 0$ mit $u(0) = u_0$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$, und $v$ entsprechend, so hat man anstelle von (1)

$$\|uv\|_{L^2_{xt}} \lesssim \left(\|u_0\|_{\dot H^\varepsilon} + \|u_1\|_{\dot H^{\varepsilon-1}}\right)\left(\|v_0\|_{\dot H^{s-\varepsilon}} + \|v_1\|_{\dot H^{s-1-\varepsilon}}\right)$$

Soweit also das, was man mit Hilfe der linearen Abschätzungen allein und einigen Zusatzargumenten erreichen kann. Was wäre darüber hinaus wünschenswert?

- Beseitigung der $\varepsilon$'s, was für die Behandlung kritischer Fälle / Regularitäten notwendig ist;
- Entsprechendes für $n = 2$;

- eine zusätzliche Shift von Ableitungen auf einem h.f.f. auf einen h.f.f. So etwas geht bei der Schrödinger-Gleichung tatsächlich, ist aber bei der Wellengleichung nicht möglich. Grund: Die Phasenfkt. wächst nur linear, für ihren Gradienten gilt $\nabla|\xi| = 1$. Derartige Glättungen beruhen auf der Superlinearität der Phasenfunktion.

- Denken wir an eine nichtlineare Wellengleichung

$$\Box u = u^2$$

Dann ist der Duhamel-Term in der entsprechenden Integralgleichung gegeben durch

$$(-\Delta)^{-\frac12} \int_0^t \sin((t-t')(-\Delta)^{\frac12})\, u(t')^2 \, dt'$$

und die inverse Ableitung $(-\Delta)^{-\frac12}$ möchten wir ausnutzen. Eingesetzt in das vorher betrachtete framework entspricht das also einem Term

$$\| (-\Delta)^{-\frac12}(uv) \|_{L^2_{xt}} \quad \left( = \|uv\|_{L^2_t(\dot H^{-1})} \right)^{(*)}$$

Mit den Argumenten aus Lemma 1 erhält man:

$$\ldots \underset{(Sob.2)}{\lesssim} \| u \cdot v \|_{L^2_t L^r_x} \quad \text{if} \quad -\frac{n}{r} = -\frac{n}{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|u\|_{L^\infty_t L^2_x} \|v\|_{L^2_t L^q_x} \quad \text{if} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q},$$

also wenn $\frac{1}{q} = \frac{1}{n}$.

---

(*) Ist bei einer Frequenzverteilung $|\xi_1 + \xi_2| \sim \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$ gut zu händeln, aber für $|\xi_1 + \xi_2| << |\xi_1| \sim |\xi_2|$ braucht es eine Idee!

Um jetzt in den Genuss der Endpunkt-Strichartz-Abschätzung zu kommen, brauchen wir $q \geq q_{endpoint}$, also (117)

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} \quad , \text{ d.h.}$$

$$2(n-1) \leq n(n-1) - 2n \iff n^2 - 5n + 2 \geq 0$$

Dieses einfache Argument kommt also erst für Raumdimensionen $n \geq 5$ zum Tragen.

- Weiterhin ist von Interesse, gewisse (kleine, nichtganzzahlige) Potenzen der Pseudodifferentialoperatoren ($\Psi$.d.O.'s)

$$D_+ := \mathcal{F}_{xt}^{-1} \, \big| |\tau| + |\xi| \big| \, \mathcal{F}_{xt} \quad \text{und} \quad D_- := \mathcal{F}_{xt}^{-1} \, \big| |\tau| - |\xi| \big| \, \mathcal{F}_{xt}$$

zu kontrollieren bzw. in die Betrachtung mit einzubeziehen. Beachten Sie, dass $D_+ D_-$ im wesentlichen der d'Alembert-Operator ist. Es sind quadratische Nichtlinearitäten mit Ableitungen 1. Ordnung auch in der Zeitvariablen, die eine bestimmte Struktur haben (sog. "Null-structure"), für die derartige Abschätzungen von Belang sind. Ein typisches Beispiel ist

$$Q_0(u,v) = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - \langle \nabla_x u, \nabla_x v \rangle$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass

$$| \mathcal{F}_{xt} Q_0(u,v)(\tau,\xi) | \lesssim \big| |\tau|^2 - |\xi|^2 \big| \, |\hat{u}| * |\hat{v}| (\xi,\tau)$$

so dass ein Fourierraum $Q_0(u,v)$ durch $D_+ D_-(u\cdot v)$ kontrolliert wird. 118

"Null-structure" für quadratische Nichtlinearitäten $Q(u) = B(u,u)$ mit einer Bilinearform $B$ der Gestalt

$$B(u,v) = \sum_{\mu,\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}\, \partial_\mu u\, \partial_\nu v \qquad (\partial_0 = \partial_t,\ \partial_\mu = \partial_{x_\mu} \text{ für } \mu \in \{1,\dots,n\})$$

bedeutet allgemeiner, dass für die $(n+1)\times(n+1)$-Matrix $A = (a_{\mu\nu})_{0\le\mu,\nu\le n}$ und alle "Null-Vektoren"

$$\bar\xi = (\tau,\xi) \in C := \{(\tau,\xi) : |\tau| = |\xi|\}$$

gilt $\langle \bar\xi, A\bar\xi\rangle = 0$.

Wellengleichungen mit Nichtlinearitäten dieser Struktur kommen in relativistischen Feldtheorien tatsächlich des öfteren vor. Insgesamt haben wir also die verallgemeinerte Fragestellung:

Für welche Sobolev-Exponenten $\beta_0, \beta_\pm, \alpha_{1,2}$ gilt die Abschätzung

$$\| D_+^{\beta_+} D_-^{\beta_-}(uv)\|_{L_t^2(H_x^{\beta_0})} \lesssim \|u_0\|_{\dot H^{\alpha_1}} \|v_0\|_{\dot H^{\alpha_2}} \quad \text{(BS)}$$

wobei wie gehabt $u = e^{\pm it(-\Delta)^{1/2}}u_0$, $v = e^{\pm i(-\Delta)^{1/2}}v_0$ sind.

Abschätzungen des Typs (BS) werden als bilineare Strichartz-Abschätzungen bezeichnet.

Das Problem wurde – beginnend mit der Arbeit von Klainerman + Machedon aus 93 – über mehrere Jahre bearbeitet (Kl., Ma., Tataru, Beals, Bezard, Selberg, Foschi). Das vollständige Ergebnis erschien dann im Jahr 2000! (119)

<u>Theorem</u> (Klainerman – Foschi): Die bilineare Abschätzung (BS) in $n \geq 2$ Raumdimensionen gilt unter den folgenden Voraussetzungen:

$$(1) \qquad \beta_0 + \beta_+ + \beta_- = \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{n-1}{2}$$

$$(2) \qquad \beta_- \geq -\frac{n-3}{4} \qquad \left(\text{für } n=2: \ \beta_- \geq \frac{1}{4} \ !\right)$$

$$(3) \qquad \beta_0 > -\frac{n-1}{2}$$

$$(4) \qquad \alpha_i \leq \beta_- + \frac{n-1}{2} \qquad (i = 1,2)$$

$$(5) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$(6) \qquad (\alpha_i, \beta_-) \neq \left(\frac{n+1}{4}, -\frac{n-3}{4}\right)$$

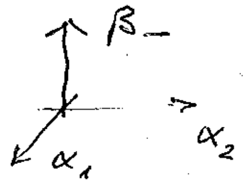
$$(7) \qquad (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_-) \neq \left(\frac{1}{2}, -\frac{n-3}{4}\right)$$

Die Voraussetzung (1) ist notwendig aufgrund des Skaling-argument.

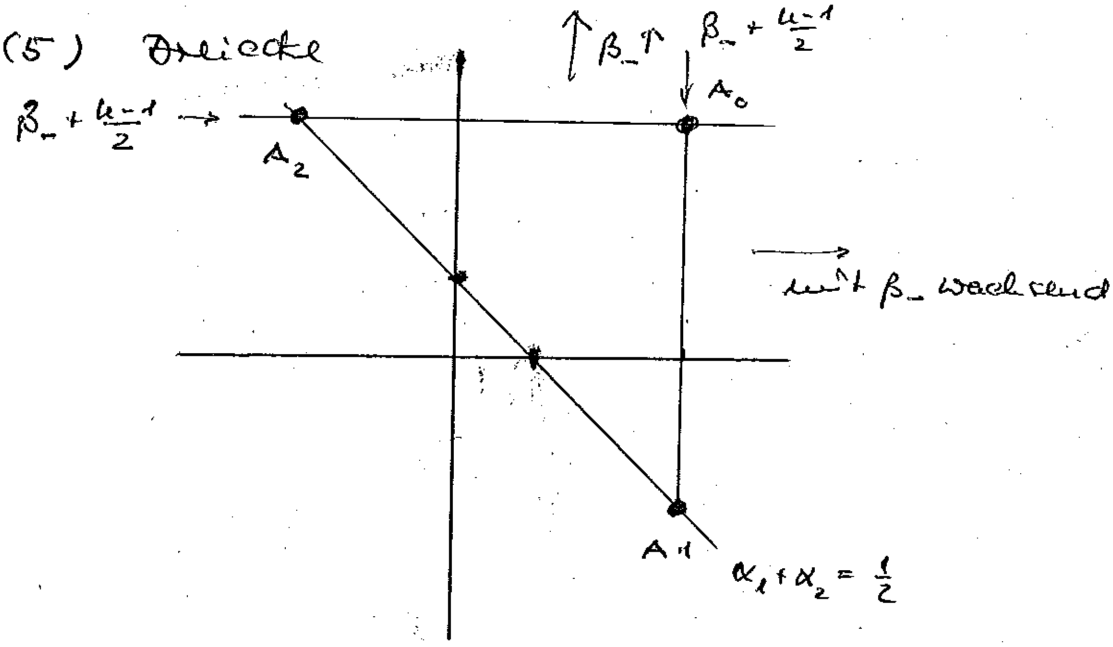
Betrachtet man $\beta_+$ als hierdurch fixiert (in Abhängigkeit von den anderen Exponenten), so beschreiben die verbleibenden ~~6~~ Bedingungen ein konvexes Polyeder im $\mathbb{R}^4 = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_-)$-Raum.
(Die Notwendigkeit all dieser Bedingungen wurde durch Beispiele belegt, die einen wesentlichen Teil dieser 60+-

seitigen Arbeit ausmachen.)

(3), d.i. $\beta_0 > \frac{n-1}{2}$ bestimmt einen offenen Halbraum in diesem $\mathbb{R}^4$, ausserdem sind (abgesehen von (1)) die Bedingungen unabhängig von $\beta_0$.




Betrachtet man jetzt horizontale Schnitte bei festem $\beta_- \geq -\frac{n-3}{2}$, so ergeben die Bedingungen (4) und (5) Dreiecke




Die Ecken:

$$A_0 = \left(\beta_- + \frac{n-1}{2},\ \beta_- + \frac{n-1}{2}\right)$$

$$A_1 = \left(\beta_- + \frac{n-1}{2},\ -\beta_- - \frac{n-2}{2}\right)$$

$$A_2 = \left(-\beta_- - \frac{n-2}{2},\ \beta_- + \frac{n-1}{2}\right)$$

Die Kanten des $\Delta e$ sind zugelassen, außer im Fall $\beta_- = -\frac{n-3}{2}$, wo sie durch die Bed. (6) und (7) ausgeschlossen sind.

Der Beweis der Abschätzung (BS) ist zu umfangreich, um ihn im Rahmen dieser Vorlesung vollständig zu führen. Wir werden einige allgemeine Argumente diskutieren und anschließend die Einzelheiten für den

$$++-\text{ Fall, d.h. } u(t) = e^{it(-\Delta)^{1/2}} u_0,\ v_{+}(t) = e^{it(-\Delta)^{1/2}} v_0$$

ausführen.

Vereinfachende Annahmen:

(i) $u_0, v_0 \in S(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{u}_0, \hat{v}_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $0 \notin \operatorname{supp}(\hat{u}_0) \cup \operatorname{supp}(\hat{v}_0)$. (Akzeptabel, da diese einen dichten linearen Teilraum der Datenräume bilden.)

(ii) $\hat{u}_0, \hat{v}_0 \geq 0$. (Diese Annahme ist gerechtfertigt, da nach Plancherel alle beteiligten Normen nur von der Größe der Fouriertransformierten abhängen.)

(iii) Für den ersten Faktor können wir uns auf das $+$-Zeichen beschränken, also $u(t) = e^{it(-\Delta)^{1/2}} u_0$ annehmen, denn die Norm links, auch mit den Operatoren $D_{\pm}^{\beta_\pm}$, ist invariant unter komplexer Konjugation.

Für Daten wie in (i) und (ii) berechnen wir die Fouriertransformierte – zuerst in $x$ und dann in $t$ - des Produkts $u \cdot v$. Alle Rechnungen führen wir "modulo Konstanten" durch, wobei diese von der Raumdimension (aber nicht weiteren) abhängen dürfen. $\mathcal{F}_x$, $*_x$ bezeichnen partielle Fouriertransformation bzw. Faltung bezüglich der Ortsvariablen. Dann haben wir

$$\mathcal{F}_x(u \cdot v)(t,\xi) \cong \mathcal{F}_x u *_x \mathcal{F}_x v(t,\xi) \qquad \text{(Faltungssatz)}$$

$$\cong \int_{\mathbb{R}^n} e^{it|\xi_1|} \hat{u}_0(\xi_1) e^{\pm it|\xi-\xi_1|} \hat{v}_0(\xi-\xi_1)\, d\xi_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(|\xi_1| \pm |\xi-\xi_1|)} \hat{u}_0(\xi_1) \hat{v}_0(\xi-\xi_1)\, d\xi_1$$

$$=: \int_{\xi_1+\xi_2=\xi} e^{it(|\xi_1| \pm |\xi_2|)} \hat{u}_0(\xi_1) \hat{v}_0(\xi_2)\, d\xi_1 ,$$

wobei man für $\int_{\xi_1+\xi_2=\xi}$ oft auch zur Abkürzung $\int_*$ schreibt.

Um hieraus die Fouriertransformierte (für temperierte Distributionen) in der Zeitvariable zu berechnen, beachten wir

$$\mathcal{F}_t^{-1} \delta_a(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}\, d\delta_a(\tau) = (2\pi)^{-1/2} e^{ita},$$

so dass

$$\delta(\tau - a) := \delta_a(\tau) = (2\pi)^{-1/2} \mathcal{F}_t(e^{i\cdot a})(\tau).$$

Damit ergibt sich

$$\mathcal{F}(uv)(\tau,\xi) \cong \int_* \delta(\tau - |\xi_1| \mp |\xi_2|)\, \hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\xi_2)\, d\xi_1 ,$$

wobei für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $P \in C^\infty(\mathrm{supp}(f),\mathbb{R})$ mit $\nabla P(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathrm{supp}(f)$ gilt

$$\delta(P)[f] = \int_{\{P=0\}} f(x) \frac{dS_x}{|\nabla P(x)|} ,$$

vgl. Vorlesung "Dispersive Gleichungen", Abschnitt 1.2.1, pp. 46 a-d; alternativ siehe: Hörmander, Lars: The Analysis of linear partial differential Operators I, Thm. 6.1.2, 6.1.5.) Beziehen wir noch die Operatoren $D_x^{\beta_0}$, $D_\pm^{\beta_\pm}$, $D_x^{\alpha_i}$ mit ein ($D_x = \mathcal{F}^{-1}|\xi|\mathcal{F} = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$), so können wir als ein erstes Teilergebnis festhalten:

<u>Lemma</u> 2: $\mathcal{F}\, D_x^{\beta_0} D_+^{\beta_+} D_-^{\beta_-}((D_x^{-\alpha_1}u)(D_x^{-\alpha_2}v))(\tau,\xi)$

$$\cong |\xi|^{\beta_0}(|\tau|+|\xi|)^{\beta_+}\,||\tau|-|\xi||^{\beta_-} \int_* \delta(\tau-|\xi_1|\mp|\xi_2|)\, \frac{\hat{u}_0(\xi_1)}{|\xi_1|^{\alpha_1}}\, \frac{\hat{v}_0(\xi_2)}{|\xi_2|^{\alpha_2}}\, d\xi_1 .$$

Zur Abschätzung der $L^2_{\xi,\tau}$-Norm dieses Ausdrucks bietet es sich an, das Faltungsintegral nach dem Flächenmaß $\delta(\ldots)$ mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung anzugehen. Es ist

$$\left( \int_* \delta(\tau - |\xi_1| \mp |\xi_2|) \frac{\hat{u}_0(\xi_1)}{|\xi_1|^{\alpha_1}} \frac{\hat{v}_0(\xi_2)}{|\xi_2|^{\alpha_2}} \, d\xi_1 \right)^2$$

$$\lesssim \left( \int_* \delta(\tau - |\xi_1| \mp |\xi_2|) \, |\xi_1|^{-2\alpha_1} |\xi_2|^{-2\alpha_2} \, d\xi_1 \right) \cdot$$

$$\left( \int_{\substack{* \\ \tau = |\xi_1| \pm |\xi_2|}} |\hat{u}_0(\xi_1) \hat{v}_0(\xi_2)|^2 \frac{dS_{\xi_1}}{|\nabla P(\xi_1)|} \right),$$

wobei $P(\xi_1) = \tau - (|\xi_1| \pm |\xi_2|)$. Um welche Flächen handelt es sich bei den Nullstellenmengen von $P$ ?

<u>Im + - Fall</u>: $\{\xi_1 \in \mathbb{R}^4 : P(\xi_1) = 0\} = \{\xi_1 \in \mathbb{R}^4 : |\xi_1| + |\xi - \xi_1| = \tau\}$ $=: E(\tau, \xi)$. Hierbei handelt es sich um ein Rotationsellipsoid mit den Brennpunkten $F_1 = 0$ und $F_2 = \xi$, die große Halbachse hat die Länge $\tau/2$.

- Für $|\xi| = \tau$ entartet $E(\tau, \xi)$ zur Strecke $[0, \xi]$,
- für $\tau < |\xi|$ wird $E(\tau, \xi) = \emptyset$ und
- für festes $\xi \in \mathbb{R}^4$ erhält man mit

$$\bigcup_{\tau > |\xi|} E(\tau, \xi) = \mathbb{R}^4 \setminus [0, \xi]$$

eine Überdeckung von $\mathbb{R}^4 \setminus$ Nullmenge mit konfokalen Rotationsellipsoiden.

Aufgrund der Geometrie wird der + - Fall als elliptischer Fall bezeichnet.

<u>Im $-$-Fall:</u> $\{\xi_1 \in \mathbb{R}^4 : P(\xi) = 0\} = \{\xi_1 \in \mathbb{R}^4 : |\xi_1| - |\xi - \xi_1| = \tau\}$

$=: H(\tau, \xi)$ ist ein zweischaliges Rotationshyperboloid mit den Brennpunkten $F_1 = 0$ und $F_2 = \xi$.

- Für $|\tau| = |\xi|$ ist $H(\tau, \xi) = \{\lambda \xi \mid \lambda \leq 0 \vee \lambda \geq 1\}$ die Vereinigung von zwei Halbgeraden,
- für $|\xi| < |\tau|$ wird $H(\tau, \xi) = \emptyset$, und
- für festes $\xi \in \mathbb{R}^4$ ist

$$\mathbb{R}^4 \setminus \{\lambda \xi : \lambda \xi : \lambda \leq 0 \vee \lambda \geq 1\} = \bigcup_{|\tau| < |\xi|} H(\tau, \xi)$$

Der $-$-Fall wird als hyperbolisch bezeichnet.

An dieser Stelle sei an die allgemeine Form der Co-Area-Formel erinnert!

<u>Satz</u> (Co-Area-Formel): Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $N \subset \mathbb{R}^4$ eine $\lambda^4$-Nullmenge und $P : \mathbb{R}^4 \setminus N \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, so dass gilt:

(i) Für $\lambda$-fast alle $\tau \in I$ ist die Niveaufläche

$N_P(\tau) := \{x \in \mathbb{R}^4 : P(x) = \tau\}$ eine glatte Hyperfläche;

(ii) $\bigcup_{\tau \in I} N_P(\tau) = \mathbb{R}^4 \setminus N$.

Dann ist für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^4 \to [0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{R}^4} f(x) |\nabla P(x)| \, dx = \int_I \int_{\{P(x) = \tau\}} f(x) \, dS_x \, d\tau.$$

Bem.: (1) Einen Beweis, sogar unter der Voraussetzung, dass $P$ lediglich Lipschitz-stetig ist, finden Sie in: L.C. Evans & R. Gariepy: Measure Theory and fine properties of functions, Chap. 3. 

(2) Bisher haben wir diese Formel lediglich angewendet mit $P(x) = |x|^2$ und $I = (0,\infty)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \overset{\text{Satz oben}}{=} \int_0^\infty \int_{|x|^2=\tau} \frac{f(x)}{\underbrace{2|x|}_{=|\nabla P(x)| \text{ in diesem Fall}}}\, dS_x\, d\tau$$

$$\begin{matrix} r^2 = \tau \\ 2r\,dr = d\tau \end{matrix} \quad = \int_0^\infty \int_{|x|=r} f(x)\, dS_x\, dr.$$

Bei den Ellipsoiden und Hyperboloiden sehen wir eine Anwendung der allgemeinen Form dieses (sehr nützlichen) Satzes.

Gehen wir nun zurück zur Cauchy-Schwarz-Anwendung nach Lemma 2 und nehmen an, es sei bereits gezeigt, dass

$$\sup_{\xi,\tau} |\xi|^{2\beta_0} \big||\tau|-|\xi|\big|^{2\beta_-} (|\tau|+|\xi|)^{2\beta_+} \int_* \delta(\tau - |\xi_1| \mp |\xi_2|)\, |\xi_1|^{-2\alpha_1} |\xi_2|^{-2\alpha_2}\, d\xi_1$$

beschränkt ist durch $c^2 < \infty$, so dass

$$\left| \mathcal{F}\, D_x^{\beta_0} D_+^{\beta_+} D_-^{\beta_-} \big( (D_x^{-\alpha_1} u)(D_x^{-\alpha_2} v) \big) (\tau,\xi) \right|^2 \le \dots$$

$$\ldots \le C^2 \cdot \int^*_{\{\tau = |\xi_1| \pm |\xi_2|\}} |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\xi_2)|^2 \frac{dS_{\xi_1}}{|\nabla P(\xi_1)|} .$$

Diese Ungleichung können wir nach $\tau$ integrieren und erhalten mit Hilfe der Co-Area-Formel

$$\| \mathcal{F}(D_x^{\beta_0} D_+^{\beta_+} D_-^{\beta_-}((D_x^{-\alpha_1}u)(D_x^{-\alpha_2}v)))(\cdot,\xi)\|^2_{L^2_\tau}$$

$$\le C^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\{\tau = |\xi_1| \pm |\xi_2|\}} |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\xi_2)|^2 \frac{dS_{\xi_1}}{|\nabla P(\xi_1)|} \, d\tau$$

$$= C^2 \cdot \int^*_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\xi_2)|^2 \, d\xi_1 .$$

Anschließende Integration nach $\xi$ liefert zusammen mit dem Satz von Plancherel

$$\| D_x^{\beta_0} D_+^{\beta_+} D_-^{\beta_-}((D_x^{-\alpha_1}u)\cdot(D_x^{-\alpha_2}v))\|^2_{L^2_{xt}}$$

$$\le C^2 \cdot \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\xi-\xi_1)|^2 \, d\xi \, d\xi_1$$

$$= C^2 \|\hat{u}_0\|^2_{L^2_\xi} \|\hat{v}_0\|^2_{L^2_\xi} = C^2 \|u_0\|^2_{L^2_x} \|v_0\|^2_{L^2_x} .$$

Ziehen wir hieraus die Wurzel, erhalten wir die gewünschte Abschätzung.

Damit ist der Beweis von (BS) darauf zurückgeführt, (128)
Integrale der Form

$$\int_{*} \delta(\tau - |\xi_1| \mp |\xi_2|)\, F(|\xi_1|, |\xi_2|)\, d\xi_1$$

abzuschätzen. Hierbei ist $F(|\xi_1|,|\xi_2|) = |\xi_1|^{-2\alpha_1} |\xi_2|^{-2\alpha_2}$ oder, wenn man dyadische Zerlegungen benutzt (z.B. um die Konvergenz der Integrale zu erzwingen), $F(|\xi_1|,|\xi_2|) = \chi_{\{\xi_1 \sim 2^k\}} \cdot \chi_{\{\xi_2 \sim 2^l\}}$. Damit dieser Abschnitt nicht zu umfangreich wird, beschränken wir uns im folgenden auf die Diskussion des elliptischen Falles.

<u>Lemma 3:</u> Für $|\xi| < \tau$ sei

$$I(F)(\tau,\xi) := \int_{E(\tau,\xi)} \delta(\tau - |\xi_1| - |\xi - \xi_1|)\, F(|\xi_1|, |\xi - \xi_1|)\, d\xi_1 .$$

Dann gilt

$$I(F)(\tau,\xi) \cong (\tau^2 - |\xi|^2)^{\frac{n-3}{2}} \int_{-1}^{1} F\left(\tfrac{1}{2}(\tau + x|\xi|), \tfrac{1}{2}(\tau - x|\xi|)\right) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot (\tau^2 - x^2|\xi|^2)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dx .$$

Bew.: In $E(\tau,\xi)$ haben wir $\tau - |\xi_1| = |\xi - \xi_1|$ und daher $F(|\xi_1|, |\xi - \xi_1|) = F(|\xi_1|, \tau - |\xi_1|)$ sowie $\tau - |\xi_1| + |\xi - \xi_1| = 2(\tau - |\xi_1|) \neq 0$. Da allgemein für $g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ mit $\{P(x) = 0\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g(x) \neq 0$ auf

$\{P(x)=0\}$ gilt, dass

$$g(x)\cdot\delta(g(x)P(x)) = \delta(P(x)),$$

folgt weiter

$$\delta(\tau-|\xi_1|-|\xi-\xi_1|)$$

$$= (\tau-|\xi_1|+|\xi-\xi_1|)\cdot\delta((\tau-|\xi_1|)^2-|\xi-\xi_1|^2)$$

$$= 2(\tau-|\xi_1|)\,\delta(\tau-|\xi|^2-2\tau|\xi_1|+2\langle\xi,\xi_1\rangle)$$

und also $I(F)(\tau,\xi)$

$$= 2\int_{E(\tau,\xi)}(\tau-|\xi_1|)\,F(|\xi_1|,\tau-|\xi_1|)\,\delta(\tau-|\xi|^2-2\tau|\xi_1|+2\langle\xi,\xi_1\rangle)\,d\xi_1,$$

und zur Berechnung dieses Integrals führen wir Polarkoordinaten ein: $\rho=|\xi_1|$, $\omega=\frac{\xi_1}{|\xi_1|}\in S^{n-1}$, so dass

$$\xi_1=\rho\cdot\omega \quad \text{und} \quad d\xi_1=\rho^{n-1}\,d\rho\,dS_\omega.$$

O.E. können wir $\xi=|\xi|e_n$ annehmen. Dann ist

$$\omega=(\omega',\pm\sqrt{1-|\omega'|^2}) \quad\text{und}\quad \pm\sqrt{1-|\omega'|^2}=\langle\omega,e_n\rangle=\frac{\langle\xi_1,\xi\rangle}{|\xi_1||\xi|}$$

$$=\cos(\vartheta)=:a, \text{ wobei } \vartheta=\sphericalangle(\xi,\xi_1).$$ Jetzt: Nochmal Polarkoordinaten!

Dann ist $a\in[-1,1]$ und $\eta:=|\omega'|=\sqrt{1-a^2}$. Mit

$\omega'':=\frac{\omega'}{\eta}\in S^{n-2}$ erhalten wir

$$dS_\omega=\frac{d\omega'}{\sqrt{1-|\omega'|^2}}=\frac{\eta^{n-2}d\eta\,dS_{\omega''}}{\sqrt{1-\eta^2}}=\sqrt{1-a^2}^{\,n-3}\,da\,dS_{\omega''},$$

da $d\eta=\left|\frac{d\eta}{da}\right|d\eta=\left|\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}\right|da \Rightarrow \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}=\frac{da}{\sqrt{1-a^2}}.$

Von $\omega''$ hängt weder $F$ noch das Argument von $\delta$ ab, so dass wir die Integration nach $dS_{\omega''}$ gleich ausführen können:

$$I(F)(\tau,\xi) \cong \int_{\frac{\tau-|\xi|}{2}}^{\frac{\tau+|\xi|}{2}} \int_{-1}^{1} (\tau-\varrho)\, F(\varrho,\tau-\varrho) \cdot \ldots$$

$$\ldots\ \delta(\tau^2-|\xi|^2-2(\tau\varrho-|\xi|\varrho a))\,(1-a^2)^{\frac{n-3}{2}}\, da\ \varrho^{n-1} d\varrho$$

Nun ist der Träger des Maßes: $\tau^2-|\xi|^2 = 2(\tau\varrho-|\xi|\varrho a)$, also $a = \frac{1}{2|\xi|\varrho}(2\tau\varrho-(\tau^2-|\xi|^2)) \in [-1,1]$, und laut $\delta(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\delta(x)$ erhalten wir

$$I(F)(\tau,\xi) \cong \frac{1}{|\xi|} \int_{\frac{\tau-|\xi|}{2}}^{\frac{\tau+|\xi|}{2}} (\tau-\varrho)\, F(\varrho,\tau-\varrho)\, \varrho^{n-2} \left(1-\left(\frac{\tau^2-|\xi|^2-2\varrho\tau}{2\varrho|\xi|}\right)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} d\varrho$$

$= \ldots$ (ähnliche Rechnung wie in der Übung) $\ldots$

$$= \frac{(\tau^2-|\xi|^2)^{\frac{n-3}{2}}}{|\xi|^{n-2}} \int_{\frac{\tau-|\xi|}{2}}^{\frac{\tau+|\xi|}{2}} (\tau-\varrho)\,\varrho\, F(\varrho,\tau-\varrho)\left(\left(\frac{\tau+|\xi|}{2}-\varrho\right)\left(\varrho-\frac{\tau-|\xi|}{2}\right)\right)^{\frac{n-3}{2}} d\varrho,$$

und schließlich bringt die Substitution $x := \frac{2\varrho-\tau}{|\xi|}$ das Integral in die behauptete Form.

Mit ähnlicher Rechnung zeigt man für den hyperbolischen Fall: (13.1)

<u>Lemma 4</u>: Für $|\tau| < |\xi|$ sei

$$I(F)(\tau,\xi) := \int_{H(\tau,\xi)} \delta(\tau - |\xi_1| + |\xi-\xi_1|)\, F(|\xi_1|, |\xi-\xi_1|)\, d\xi_1 .$$

Dann gilt: $I(F)(\tau,\xi) \cong$

$$(|\xi|^2-\tau^2)^{\frac{n-3}{2}} \int_1^\infty F\left(\frac{x|\xi|+\tau}{2}, \frac{x|\xi|-\tau}{2}\right) (x^2|\xi|^2-\tau^2)(x^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\, dx .$$

(s. Foschi-Klainerman.)

Um mit dem elliptischen Fall fortzufahren, soll das Lemma 3 nun auf $F(s,t) = s^{-a} t^{-b}$ (mit $a = 2\alpha_1$ und $b = 2\alpha_2$) angewendet werden. Aufgrund der Symmetrie $\xi_1 \longleftrightarrow \xi-\xi_1$ bzw. $s \longleftrightarrow t$ können wir o.E. $a \geq b$ annehmen.

<u>Lemma 5</u>: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \geq b$, $\tau > |\xi|$ und

$$I(\tau,\xi) = \int_{E(\tau,\xi)} \delta(\tau - |\xi_1| - |\xi-\xi_1|)\, |\xi_1|^{-a} |\xi-\xi_1|^{-b}\, d\xi_1 .$$

Dann gilt $I(\tau,\xi) \lesssim \tau^A (\tau-|\xi|)^B$, wobei

$$A = \max\{a, \tfrac{n+1}{2}\} - a - b \quad \text{und} \quad B = n-1-\max\{a, \tfrac{n+1}{2}\},$$

mit Ausnahme von $a = \frac{n+1}{2}$; in diesem Fall ist

$$I(\tau,\xi) \lesssim \tau^{-b} (\tau-|\xi|)^{\frac{n-3}{2}} \left(1 + \ln\left(\frac{\tau}{\tau-|\xi|}\right)\right).$$

Bew.: Elementare Abschätzungen (nicht prüfungsrelevant)

Nun zerlegen wir

$$\mathcal{F} D_x^{\beta_0} D_+^{\beta_+} D_-^{\beta_-}((D_x^{-\alpha_1}u)(D_x^{-\alpha_2}v)) = B_\sim(\hat{u}_0,\hat{v}_0) + B_{\ll}(\hat{u}_0,\hat{v}_0),$$

wobei wir verlangen, dass für ein $\varepsilon_0 > 0$

$$B_\sim(\hat{u}_0,\hat{v}_0) = \chi_{\{\varepsilon_0\tau \le |\xi| \le \tau\}} B_\sim(\hat{u}_0,\hat{v}_0)$$

und

$$B_{\ll}(\hat{u}_0,\hat{v}_0) = \chi_{\{|\xi| < \varepsilon_0\tau\}} B_{\ll}(\hat{u}_0,\hat{v}_0).$$

Proposition 1: Unter den Voraussetzungen

$$(1) \quad \beta_0 + \beta_+ + \beta_- = \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{n-1}{2}$$

$$(2) \quad \beta_- \ge \frac{n-3}{2} \qquad\qquad (4) \quad \alpha_i \le \beta_- + \frac{n-1}{2}$$

und $\quad (6) \quad (\alpha_i,\beta_-) \neq \left(\frac{n+1}{4}, -\frac{n-3}{2}\right)$

gilt $\quad \|B_\sim(\hat{u}_0,\hat{v}_0)\|_{L^2_{\xi,\tau}} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{L^2_\xi} \|\hat{v}_0\|_{L^2_\xi}.$

Bew.: Nach den Vorüberlegungen ist nur noch z.z., dass

$$A(\tau,\xi) \le C \qquad \text{ist für}$$

$$A(\tau,\xi) := \underbrace{|\xi|^{2\beta_0}(\tau+|\xi|)^{2\beta_+}}_{\sim\, \tau^{2(\beta_0+\beta_+)}}(\tau-|\xi|)^{2\beta_-}\int \delta(\tau-|\xi_1|-|\xi-\xi_1|)\,|\xi_1|^{-2\alpha_1}|\xi-\xi_1|^{-2\alpha_2}\,d\xi_1$$

wobei stets $\varepsilon_0\tau \le |\xi| \le \tau$ und o.E. $\alpha_1 \ge \alpha_2$ zur Verfügung steht. Lemma 5 ergibt

(i) im Fall $2\alpha_1 > \frac{n+1}{2}$ bzw. $\alpha_1 > \frac{n+1}{4}$, so dass in diesem Lemma $A = -2\alpha_2$, $B = n-1-2\alpha_1$:

$$A(\tau,\xi) \lesssim \tau^{2(\beta_0+\beta_+-\alpha_2)}(\tau-|\xi|)^{2(\beta_-+\frac{n-1}{2}-\alpha_1)}$$

$$\underset{(1)}{=} \left(\frac{\tau-|\xi|}{\tau}\right)^{2(\beta_-+\frac{n-1}{2}-\alpha_1)} \leq 1,$$

letzteres, sofern $\beta_- + \frac{n-1}{2} - \alpha_1 \geq 0$, d.i. (4).

(ii) Im Fall $\alpha_1 = \frac{n+1}{4}$ (in L5 also: $a = \frac{n+1}{2}$, das ist die Ausnahme in L5)

$$A(\tau,\xi) \lesssim \tau^{2(\beta_0+\beta_+-\alpha_2)}(\tau-|\xi|)^{2(\beta_-+\frac{n-3}{4})}\left(1+\ln\left(\frac{\tau}{\tau-|\xi|}\right)\right)$$

$$\underset{(1)}{\lesssim} \left(\frac{\tau-|\xi|}{\tau}\right)^{2(\beta_-+\frac{n-3}{4})}\left(1+\ln\left(\frac{\tau}{\tau-|\xi|}\right)\right) \lesssim 1,$$

solange $\beta_- > -\frac{n-3}{4}$ ist, und das ist (6).

(iii) Im Fall $\alpha_1 < \frac{n+1}{4}$, so dass in Lemma 5

$$A = \frac{n+1}{2} - 2(\alpha_1+\alpha_2) \quad \text{und} \quad B = \frac{n-3}{2} \quad \text{wird:}$$

$$A(\tau,\xi) \lesssim \tau^{2(\beta_0+\beta_++\frac{n+1}{4}-\alpha_1-\alpha_2)}(\tau-|\xi|)^{2(\beta_-+\frac{n-3}{4})}$$

$$\underset{(1)}{=} \left(\frac{\tau-|\xi|}{\tau}\right)^{2(\beta_-+\frac{n-3}{4})} \leq 1,$$

solange $\beta_- \geq -\frac{n-3}{4}$, und das ist (2). $\square$

Proposition 2: Unter den Voraussetzungen

(1) $\beta_0+\beta_++\beta_- = \alpha_1+\alpha_2-\frac{n-1}{2}$ und (3) $\beta_0 > \frac{n-1}{2}$

gilt $\|B_{<<}(\hat{u}_0,\hat{v}_0)\|_{L^2_{\xi,\tau}} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{L^2_\xi}\|\hat{v}_0\|_{L^2_\xi}$.

Bem. zu den Größenordnungen der Frequenzen: Wir haben

$\tau = |\xi_1| + |\xi - \xi_1| >> |\xi|$ und daher auch $|\xi_1| \sim |\xi - \xi_1| \sim \tau >> |\xi|$

sowie $\tau \sim \tau - |\xi|$. Also ist

$$B_{<<}(\hat{u}_0, \hat{v}_0) \lesssim |\xi|^{\beta_0} \tau^{\beta_+ + \beta_- - \alpha_1 - \alpha_2} \int_* \hat{u}_0(\xi_1) \hat{v}_0(\xi_2) \delta(\tau - |\xi_1| - |\xi_2|)\, d\xi_1$$

Das Argument im Bew. von Prop. 1 führt zwar zum Ziel, solange $\beta_0 \geq 0$ ist, bringt aber Probleme, wenn $\beta_0 < 0$ ist und $|\xi| \to 0$ strebt. Daher verwendet man die sogenannte "doubling technique", die es erlaubt, die Integration nach $\xi$ nach innen zu ziehen.

Beweisskizze: Zunächst ein Zerlegungsargument:

Wg. $|\xi_1| \sim |\xi - \xi_1| >> |\xi|$ sind ungefähr $\xi_1 = \xi_1 - \xi$, also $\xi_1$ und $\xi - \xi_1$ beide groß und entgegengesetzt. Zerlege

$S^{n-1} = \bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j$, $\Omega_j$ mit einem Öffnungswinkel $\theta_0 > 0$

$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_j$ ; $\Gamma_j = \{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \frac{\xi}{|\xi|} \in \Omega_j\}$

Das ergibt $N$ Beiträge mit $\xi_1 \in \Gamma$ und $\xi - \xi_1 \in -\Gamma$, wobei $\Gamma$ ein Kegel mit Spitze im Nullpunkt und Öffnungswinkel $2\theta_0$ ist. Sind $\theta_0$ und damit $N$ fest gewählt, reicht es also aus, die Abschätzung für ein solches $\Gamma$ zu erbringen. Wir können also annehmen, dass $\hat{u}_0 = \hat{u}_0 \chi_\Gamma$ und $\hat{v}_0 = \hat{v}_0 \cdot \chi_{-\Gamma}$ ist.

Dann ist

$$|B_{<<}(\hat{u}_0,\hat{v}_0)(\tau,\xi)|^2 \cong |\xi|^{2\beta_0}\, \tau^{2\underbrace{(\beta_+ + \beta_- - \alpha_1 - \alpha_2)}_{\overset{(1)}{=} -\beta_0 - \frac{n-1}{2}}} \cdot I \quad \text{mit}$$

(schreibe das Quadrat des Integrals in $B_{<<}(\hat{u}_0,\hat{v}_0)$ aus als ein Doppelintegral!)

$$I = \iint_{*\, \substack{\xi_1,\, \xi-\eta_1 \in \Gamma \\ \eta_1,\, \xi-\xi_1 \in -\Gamma}} \hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\xi-\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\eta_1)\hat{v}_0(\eta_1) \cdot \delta(\tau-|\xi_1|-|\xi_2|) \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot \delta(\tau-|\eta_1|-|\eta_2|)\, d\xi_1\, d\eta_1$$

Nun soll zuerst nach $\tau$ integriert werden, wobei der Faktor $\tau^{2(\ldots)}$ allerdings stört. Diesen können wir jedoch ersetzen durch – sagen wir – $|\xi_1|^{-(n-1+2\beta_0)}$.

Also: $|B_{<<}(\hat{u}_0,\hat{v}_0)(\tau,\xi)|^2$

$$\lesssim |\xi|^{2\beta_0} \cdot \iint_{*\, \substack{\xi_1,\, \eta_2 \in \Gamma \\ \eta_1,\, \xi_2 \in -\Gamma}} |\xi_1|^{-(n-1+2\beta_0)}\, \hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\eta_1)\hat{u}_0(\eta_2)\hat{v}_0(\xi_2) \cdot$$
$$\delta(\tau-|\xi_1|-|\xi_2|)\,\delta(\tau-|\eta_1|-|\eta_2|)\, d\xi_1\, d\eta_1$$

Beachten wir $\int \delta(\tau-a)\delta(\tau-b)\,d\tau = \delta(a-b)$, folgt

$$\iint |B_{<<}(\hat{u}_0,\hat{v}_0)(\tau,\xi)|^2\, d\xi\, d\tau$$

$$\lesssim \iint_{\substack{\xi_1\in\Gamma \\ \eta_1 \in -\Gamma}} \int_{|\xi| << |\xi_1| \sim |\eta_1|} |\xi_1|^{-(n-1-2\beta_0)}\, \hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\eta_1)\hat{u}_0(\xi-\eta_1)\hat{v}_0(\xi-\xi_1)\, |\xi|^{2\beta_0}$$
$$\delta(|\xi_1|+|\xi-\xi_1|-|\eta_1|-|\xi-\eta_1|)\, d\xi \quad d\xi_1\, d\eta_1 \quad \left(\begin{array}{c}\int d\xi \text{ nach} \\ \text{innen ge-} \\ \text{schoben!}\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Cauchy-} \\ \text{Schwarz in} \\ \text{allen Variablen}}}{\leq} \int_{\xi_1\in\Gamma}\int_{\eta_1\in-\Gamma} |\xi_1|^{-(n-1-2\beta_0)}\, |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\eta_1)|^2 \cdot J(\xi_1,\eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1,$$

wobei

$$J(\xi_1,\eta_1) = \int_{|\xi| << |\xi_1| \sim |\eta_1|} |\xi|^{2\beta_0} \delta(|\xi_1| + |\xi-\xi_1| - |\eta_1| - |\xi-\eta_1|)\, d\xi$$

Die Beh. folgt, wenn wir zeigen können, dass

$$|\xi_1|^{-(n-1-2\beta_0)} J(\xi_1,\eta_1) \le C \qquad (!)$$

ist, wobei $C$ unabhängig sein muss von $\xi_1 \in \Gamma$ und $\eta_1 \in -\Gamma$. Vereinfachen wir etwas, indem wir $|\xi_1| \sim |\eta_1| \sim \lambda$ annehmen, so bedeutet (!)

$$\lambda^{-(n-1-2\beta_0)} \int_{|\xi| << \lambda} |\xi|^{2\beta_0} \delta(|\xi_1| + |\xi-\xi_1| - |\eta_1| - |\xi-\eta_1|)\, d\xi \le C$$

Reskaliert man $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{\lambda}$, $\tilde{\xi}_1 = \frac{\xi_1}{\lambda}$, $\tilde{\eta}_1 = \frac{\eta_1}{\lambda}$ (und nennt anschließend wieder $\tilde{\xi} = \xi$ usw.), so reduziert sich letzteres auf den Beweis von

$$\int_{|\xi| << 1} |\xi|^{2\beta_0} \delta(|\xi_1| + |\xi-\xi_1| - |\eta_1| - |\xi-\eta_1|)\, d\xi \le C \qquad (*)$$

Nun ist der Träger des Maßes $\delta(\ldots)$ ein Hyperboloid mit den Brennpunkten $\xi_1$ und $\eta_1$, der annähernd eben ist im Bereich $|\xi| << 1$ (denn $|\xi_1| \sim |\eta_1| \sim 1$). Genauer

$$\int \delta(|\xi_1| + |\xi-\xi_1| - |\eta_1| - |\xi-\eta_1|)\, d\xi = \int_{|\xi_1| - |\eta_1| = |\xi-\xi_1| - |\xi-\eta_1| = P(\xi)} \frac{dS_\xi}{|\nabla P(\xi)|}$$

und $|\nabla P(\xi)| = \left| \frac{\xi-\xi_1}{|\xi-\xi_1|} - \frac{\xi-\eta_1}{|\xi-\eta_1|} \right| \approx 2$, da $\xi-\xi_1 \in -\Gamma$ und $\xi-\eta_1 \in \Gamma$.

Daher können wir das Integral in (*) abschätzen durch das n-1-dim. Integral $(\xi = (\xi', \xi_n))$

$$\int_{|\xi'| << 1} |\xi'|^{2\beta_0} \, d\xi' \lesssim \int_0^1 r^{2\beta_0 + n - 2} \, dr \leq C_{\beta_0},$$

sofern $2\beta_0 + n - 2 > -1$ ist, d.h. $\beta_0 > \frac{1-n}{2}$, und das ist die Vor. (3).