Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2023
14.04.2023
Blatt 1

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 1 (6 P.) Bereits 1872 leitete Joseph Valentin Boussinesq die folgende, später nach ihm benannte $1+1$-dimensionale Modellgleichung

$$u_{tt} - u_{xx} \pm u_{xxxx} = (u^2)_{xx} \tag{1}$$

für die Ausbreitung von Oberflächenwellen in einem Kanal her [1]. Bestimmen Sie - ähnlich wie dies in der Vorlesung für die Klein-Gordon-Gleichung durchgeführt wurde - ein äquivalentes System erster Ordnung (bezüglich der Zeitvariable t). Welche Phasenfunktionen treten bei welchem Vorzeichen auf, und bei welcher Vorzeichenwahl ist (1) eine Wellengleichung? Geben Sie auch an, wie sich die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{und} \qquad u_t(x,0) = u_1(x)$$

bei der Umwandlung in ein System 1. Ordnung transformieren.

Aufgabe 2 (Solitonen für gKdV, 2+3 P.) In den Übungen zu "Einführung in die partiellen Differenzialgleichungen" (WiSe 21/22, Aufgaben 10 und 11) haben Sie gezeigt, dass die Funktion

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y(x) := \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

der gewöhnlichen Differenzialgleichung $y'' = y - 2y^3$ genügt und dass allgemeiner für $y_q = y^{\frac{2}{q}}$ mit $q > 0$ gilt

$$y_q'' = \frac{4}{q^2} y_q - \frac{2}{q}\left(\frac{2}{q} + 1\right) y_q^{q+1}.$$

Bitte wenden!

[1] Boussinesq, J.: Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. J. Math. Pures Appl. (2) 17 (1872), 55 - 108. Bei Wahl des positiven Vorzeichens in (1) spricht man von der "good", andernfalls von der "bad" Boussinesq equation.

(a) Welche gewöhnliche Differenzialgleichung 2. Ordnung ergibt sich allgemeiner für $y_{\lambda,\mu;q}(x) := \lambda^{\frac{1}{q}} y_q(\mu x)$?

(b) Bestimmen Sie spezielle reelle Lösungen der verallgemeinerten KdV-Gleichung

$$u_t + u_{xxx} + (u^{k+1})_x = 0 \qquad\qquad (k \in \mathbb{N})$$

der Form $u(x,t) = v(x - ct)$. Hierbei sei die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$ vorgegeben.

Aufgabe 3 (1+2+3+1 P.) Es seien $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und u eine reelle, glatte und schnell fallende Lösung der verallgemeinerten KdV-Gleichungen

$$u_t + u_{xxx} + \lambda(u^{k+1})_x = 0.$$

Zeigen Sie durch formale Rechnung, dass die folgenden Integrale Erhaltungsgrößen sind:

$$I_0(u(t)) := \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx, \quad I_1(u(t)) := \int_{\mathbb{R}} u(x,t)^2 dx, \quad I_2(u(t)) := \int_{\mathbb{R}} u_x(x,t)^2 - \frac{2\lambda}{k+2} u(x,t)^{k+2} dx.$$

Wie sind die Erhaltungsgrößen und die Rechnungen zu modifizieren, wenn die Lösung u reell, glatt und 2π-periodisch in der Raumvariable x ist?

Abgabe: 21.04.2023, in der Vorlesung,
Besprechung: 28.04.2023