Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2023
23.06.2023
Blatt10

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 23 (1+1+2+5=9 P.) Es seien $1 < p < \dfrac{n+2}{n-2}$ (falls $n \in \{1, 2\}$: $1 < p < \infty$), $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ und $u \in C([-T, T], H^1(\mathbb{R}^n))$ eine Lösung von

$$iu_t + \Delta u \mp |u|^{p-1}u = 0 \qquad \text{(NLS)}$$

mit $u(t = 0) = u_0$, die stetig von den Daten und deren Lebensdauer T nur von $\|u_0\|_{1,2}$ abhängt, vgl. Problem 3.

(a) Zeigen Sie, dass $E(u_0) < \infty$, wobei die Energie E durch

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 \pm \frac{2}{p+1} |u(x)|^{p+1} dx$$

gegeben ist.

(b) Folgern Sie für den "defocusing case" ($-$ - Zeichen in (NLS), $+$ - Zeichen in der Energie), dass u zu einer globalen Lösung $\widetilde{u} \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^n))$ von (NLS) fortgesetzt werden kann.

(c) Für den "focusing case" ($+$ - Zeichen in (NLS)) zeige man mit Hilfe des Sobolev'schen Einbettungssatzes und der Aufgabe 15, dass

$$\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \lesssim \|u_0\|_2^{p+1-\frac{n(p-1)}{2}} \|u(t)\|_{\dot{H}^1}^{\frac{n(p-1)}{2}}$$

und folgere die Ungleichung

$$\|u(t)\|_{\dot{H}^1}^2 \leq 2E(u_0) + c\|u_0\|_2^{p+1-\frac{n(p-1)}{2}} \|u(t)\|_{\dot{H}^1}^{\frac{n(p-1)}{2}}.$$

(d) Folgern Sie weiter:
  (i) Ist $p < 1 + \frac{4}{n}$, so ist $\|u(t)\|_{1,2}$ beschränkt, und die Lösung kann auf die ganze reelle Achse fortgesetzt werden;
  (ii) ist $p = 1 + \frac{4}{n}$, so existiert ein ε_0 derart, dass für $\|u_0\|_2 \leq \varepsilon_0$ die Norm $\|u(t)\|_{1,2}$ beschränkt ist und die Lösung u global fortgesetzt werden kann;
  (iii) wenn $1 + \frac{4}{n} < p < \frac{n+2}{n-2}$ ist, existiert ein $\varepsilon_1 > 0$, so dass im Fall $\|u_0\|_{1,2} \leq \varepsilon_1$ dieselbe Schlussfolgerung gezogen werden kann.

Bitte wenden!

Problem 4 (Van der Corput, 1921; 4+5+3 = 12 P.) Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi \in C^\infty([a,b],\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $|\varphi'(\xi)| \geq 1$ für alle $\xi \in [a,b]$ und ist φ' monoton, so gilt für alle $\lambda \geq 1$

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(\xi)} d\xi \right| \leq \frac{4}{\lambda}.$$

(b) Gilt für ein $k \geq 2$, dass $|\varphi^{(k)}(\xi)| \geq 1$ für alle $\xi \in [a,b]$, so existiert eine Konstante c_k derart, dass für alle $\lambda \geq 1$

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(\xi)} d\xi \right| \leq c_k \lambda^{-\frac{1}{k}}.$$

(c) Sind die Voraussetzungen aus (a) oder (b) für ein $k \in \mathbb{N}$ erfüllt und ist $\psi \in C^1([a,b])$, so gilt

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(\xi)} \psi(\xi) d\xi \right| \leq c_k \lambda^{-\frac{1}{k}} \big(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(\xi)| d\xi \big).$$

Wie lässt sich die letzte Ungleichung vereinfachen, wenn ψ reell ist und sein Monotonieverhalten auf $[a,b]$ nicht bzw. nur endlich oft ändert?

Hinweise: (a) Verwenden Sie den Operator $L := \frac{1}{i\lambda\varphi'} \frac{d}{d\xi}$ und integrieren Sie partiell. (b) Für einen Induktionsbeweis liefert Teil (a) den Anfang. Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen von $\varphi^{(k)}$, wenn $\varphi^{(k+1)} \geq 1$ ist? (c) Schreiben Sie den Exponentialfaktor mit dem Hauptsatz als Ableitung eines Integrals, und integrieren Sie erneut partiell.

Abgabe: 30.06.2023, in der Vorlesung,
Besprechung: 07.07.2023